Stereometrie.

Lehrbuch und Aufgabensammlung

für Schulen

von

Wilhelm Winter
Professor für Mathematik und Physik am k. alten Gymnasium in Regensburg.

München
Theodor Ackermann
königlicher Hof-Buchhändler
1890.

Stereometrie.

Lehrbuch und Aufgabensammlung

für Schulen

von

Wilhelm Winter
Professor für Mathematik und Physik am k. alten Gymnasium in Regensburg.

München
Theodor Ackermann
königlicher Hof-Buchhändler
1890.

Vorwort.

Bei Abfassung dieses Lehrbuches der Stereometrie leiteten mich hauptsächlich folgende Gedanken.

Die wichtigsten Lehren wollte ich in einfacher Form vortragen, weshalb ich die hiezu nötigen Beweise meist angab; die sich anschließenden Sätze von mehr untergeordneter Bedeutung aber, welche sich als Umkehrungen, Verallgemeinerungen, Zusätze oder verwandte Sätze darstellen, habe ich nicht ausführlich bewiesen, einerseits um Platz zu sparen, andrerseits um dem Schüler Gelegenheit zu geben, selbständig zu arbeiten und sich durch den Versuch eigener Lösung auf den Schulunterricht vorzubereiten; für solchen Zweck habe ich vielfach wenigstens den Gang des Beweises angegeben oder durch Anführung der zum Beweise nötigen Sätze angedeutet. Zudem habe ich noch hie und da Uebungssätze eingestreut, welche als solche willkommen sein dürften. Manche Kapitel, wie das Prismatoid, der schief abgeschnittene Cylinder, die Cylinderdreiecke und die Guldin'sche Regel, die in manchen Schulen nicht in's Programm aufgenommen sind, habe ich nicht blos durch kleineren Druck, sondern auch dadurch abgesondert, daß auf sie in den folgenden Kapiteln kein Bezug genommen wird; dasselbe gilt auch von anderen klein gedruckten Absätzen, so daß der Lehrer die Wahl hat, mit einer besseren Klasse oder bei reichlicherer Zeit auch diese abgetrennten Gebiete zu begehen, oder mit schwächeren Schülern blos das Notwendige durchzunehmen.

An Aufgaben glaube ich eine genügend reiche Anzahl gegeben zu haben. Bei ihrer Aufstellung sah ich weniger darauf, ob zur Lösung ein besonders schwieriges System von Gleichungen mit

mehreren Unbekannten notwendig sei, als vielmehr darauf, daß zur Lösung ein Verständnis der Körperform, ein Eingehen in die stereometrischen Beziehungen, ein Aufsuchen der geometrischen Eigenschaften und eine sachgemäße Anwendung der bekannten Formeln erforderlich sei. Zahlenaufgaben mit sogenanntem schönen Resultat, bei welchen als solches immer 1 oder 2, oder höchstens einmal $1^1/_2$ oder 100 herauskommen darf, habe ich selten gegeben; sie machen stets den Eindruck des Gekünstelten und deshalb des Unwahren, die Natur und die Anwendung bietet uns auch solche nicht und zudem sind die Schüler bei Behandlung der Stereometrie oder wenigstens der zusammengesetzteren Rechnungsaufgaben derselben meist schon mit den Logarithmen vertraut und bewältigen damit leicht die ungefügen Zahlen. Doch habe ich die letzteren stets so gewählt, daß der Körper leichtverständliche Dimensionen hat und ziemlich „wohl proportioniert“ erscheint, und der Lehrer kann durch passende Wahl neuer Zahlen die Rechnung variieren, ohne den Charakter der Aufgabe zu ändern.

Da in den meisten Schulen nahezu gleichzeitig mit Stereometrie auch Trigonometrie gelehrt wird, so habe ich am Schlusse „Aufgaben mit Trigonometrie“ beigefügt, welche an passenden Stellen eingeflochten werden können, um so leichter, als bei ihnen das stereometrische Interesse überwiegt und zu ihrer Lösung meistens nur das rechtwinkelige Dreieck erforderlich ist.

Möge das Buch dazu dienen, um die in planimetrischen Beweisen und Anschauungen geübten Schüler in einer zur selbstständigen Arbeit anspornenden Weise in die Betrachtung räumlicher Gebilde einzuführen, und ihnen dadurch auch Fähigkeit und Lust zur Lösung stereometrischer Aufgaben geben.

Regensburg, um Ostern 1889.

Der Verfasser.

Inhaltsübersicht.

Erster Teil.

Lage geometrischer Gebilde im Raum.

I. Abschnitt.

Lage von Geraden gegen Ebenen im Raum.

1.

Vorbegriffe.

Der unbegrenzte Raum wird durch eine Ebene in zwei Räume geteilt.

Zwei Ebenen haben entweder keinen Punkt mit einander gemeinsam, so weit man sie auch erweitern mag, oder sie haben eine Gerade gemeinsam, oder sie fallen ganz zusammen.

Im ersten Falle nennt man die Ebenen parallel, im zweiten Falle sagt man, sie schneiden sich und nennt ihre gemeinsame Gerade auch ihre Schnittlinie, und im dritten Fall beweist man, daß die Ebenen E_1 und E_2, wenn sie außer einer Geraden G nur noch einen Punkt A gemeinsam haben, alle Punkte gemeinsam haben. Denn man trifft alle Punkte von E_1, wenn man durch A alle Geraden legt, die zu Punkten von G führen; ebenso trifft man alle Punkte von E_2, wenn man durch A und die Punkte von G alle möglichen Geraden legt. Die Geraden des ersten Strahlensystems fallen aber mit den Geraden des zweiten Strahlensystems zusammen, da jedes Paar entsprechender Geraden durch dieselben zwei Punkte geht; also fallen alle Punkte von E_1 mit den Punkten von E_2 zusammen. Daraus folgt:

Eine Ebene ist bestimmt durch eine Gerade und einen außerhalb der Geraden liegenden Punkt. Diesen Bestimmungsstücken sind äquivalent: drei nicht in einer Geraden liegende Punkte, zwei sich schneidende Gerade, oder zwei parallele Gerade, als solche, welche sich im Unendlichen schneiden.

Durch eine Gerade ist eine Ebene nicht vollständig bestimmt; es gibt unendlich viele Ebenen, welche durch eine Gerade gehen; die Gesamtheit aller durch eine Gerade gehenden Ebenen nennt man ein Ebenenbüschel, die Gerade heißt seine Achse.

2.

Gerade senkrecht auf einer Ebene.

Eine Gerade hat mit einer Ebene entweder keinen, oder einen, oder zwei Punkte gemein. Im ersten Falle nennt man sie der Ebene parallel, im zweiten Falle schneidet sie die Ebene und man nennt den gemeinsamen Punkt den Fußpunkt der Geraden, im dritten Falle liegt sie ganz in der Ebene.

Lehrsatz. Wenn eine Gerade eine Ebene schneidet und dabei senkrecht steht auf zwei durch ihren Fußpunkt gehenden und in der Ebene liegenden Geraden, so steht sie auch senkrecht auf jeder durch ihren Fußpunkt gehenden Geraden der Ebene.

Voraussetzung: $AB \perp BC$, $AB \perp BD$.

Behauptung: $AB \perp BE$.

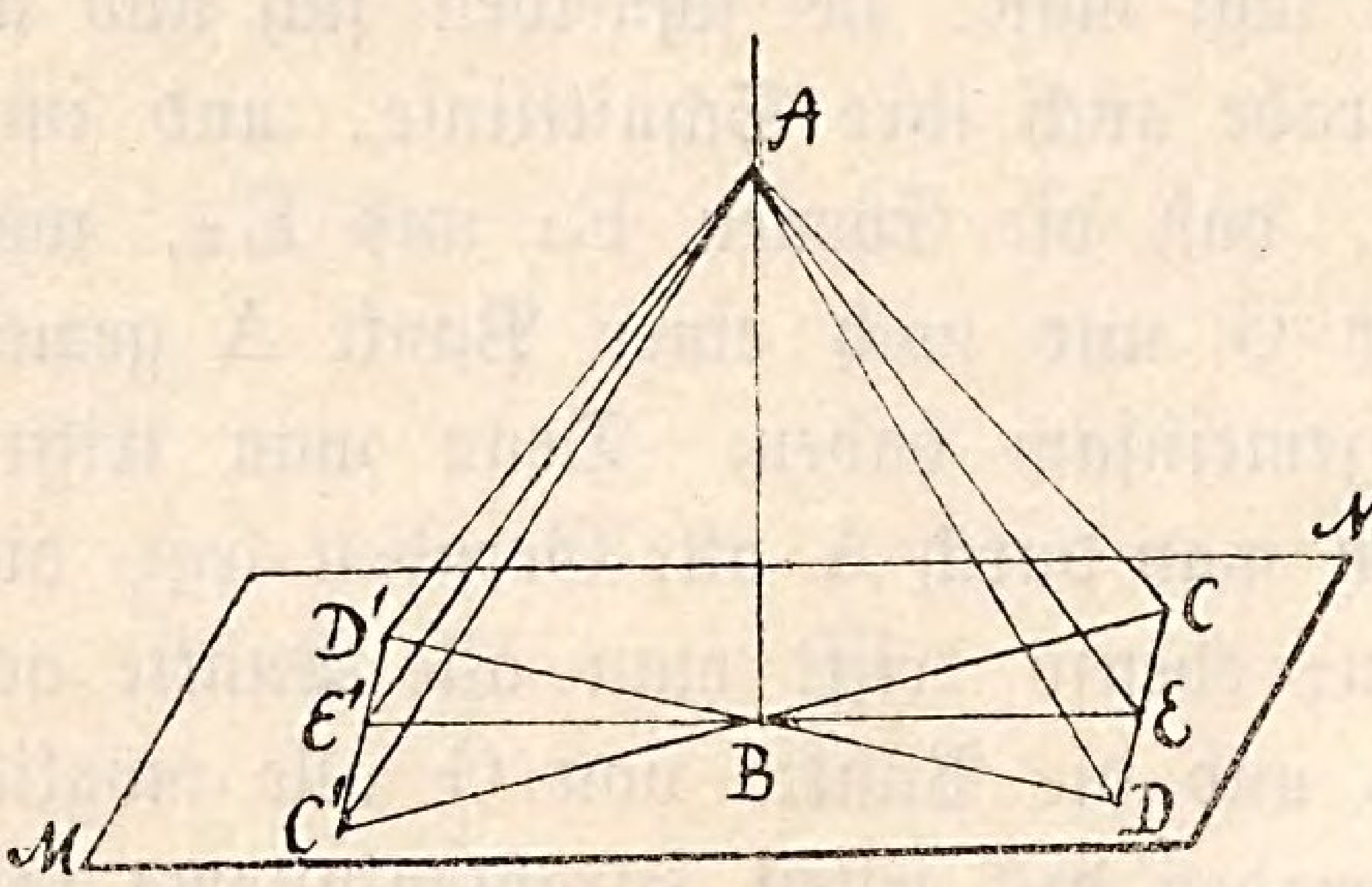


Fig. 1.

Beweis. Man verlängere BC rückwärts, so daß $BC = BC'$, mache ebenso $BD = BD'$, ziehe CD, C'D', verlängere ebenso die beliebig durch B gelegte Gerade BE nach E' und verbinde C, C', D, D', E, E' mit A, so folgt aus

$\triangle ABD \cong \triangle ABD'$ $AD = AD'$
und aus $\triangle ABC \cong \triangle ABC'$ folgt $AC = AC'$
und aus $\triangle BCD \cong \triangle BC'D'$ folgt $CD = C'D'$;
hieraus $\triangle ACD \cong \triangle AC'D'$, also $\sphericalangle ACD = \sphericalangle AC'D'$;
zudem aus $\triangle BCE \cong \triangle BC'E'$ folgt $CE = C'E'$,
also $\triangle ACE \cong \triangle AC'E'$, also $AE = AE'$; hieraus
und aus $BE = BE'$ folgt
$\triangle ABE \cong \triangle ABE'$, also $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ABE'$;
das sind aber Nebenwinkel, also $AB \perp BE$.

Zur Uebung mache man den Beweis für den Fall, daß BE in den Nebenwinkel von CBD fällt. Auch kann man, anstatt die Rückwärtsverlängerungen von BC und BD zu nehmen, AB um seine eigene Länge unterhalb der Ebene nach A' verlängern, A' mit C, D, E verbinden und so den Beweis machen.

Nachdem durch diesen Satz bewiesen ist, daß eine Gerade auf allen Strahlen des durch ihren Fußpunkt in der Ebene gelegten Strahlenbüschels senkrecht stehen kann, bildet man die

Definition: Eine auf einer Ebene senkrecht stehende Gerade ist eine solche, welche auf allen durch ihren Fußpunkt gelegten Geraden der Ebene senkrecht steht.

Man bemerke aber, daß hiezu blos die senkrechte Stellung zu zwei Geraden erforderlich ist. Will man also beweisen, daß eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, so braucht man blos zu beweisen, daß sie auf zwei Geraden der Ebene senkrecht steht; weiß man aber umgekehrt, daß eine Gerade senkrecht auf einer Ebene steht, so heißt das, daß sie auf allen Geraden der Ebene, welche durch ihren Fußpunkt gehen, senkrecht steht.

Jede die Ebene schneidende Gerade, welche nicht auf der Ebene senkrecht steht, heißt in Bezug auf diese Ebene schief.

3.

Lehrsatz. Steht eine Gerade auf drei durch einen ihrer Punkte gehenden Geraden senkrecht, so liegen diese drei Geraden in einer Ebene.

Beweis. Durch zwei dieser Geraden, etwa BC und BD kann man eine Ebene legen, welche nach 2 auf $AB \perp$ steht. Wir nehmen an, die dritte Gerade BJ liege nicht in dieser Ebene CBD, so kann man durch AB und BJ eine Ebene legen,

diese schneidet Eb CBD längs einer Geraden BK. Da nun BK in Eb CBD und AB ⊥ Eb CBD, so ist nach 2 AB ⊥ BK. Man hat also in Eb ABJ auf AB in demselben Punkte B zwei Senkrechte (BJ nach der Voraussetzung, und BK als Folge der Annahme, daß BJ nicht in Eb CBD liege); dies ist aber unmöglich, folglich ist die Annahme, daß BJ außerhalb Eb CBD liege, unzulässig; also liegt BJ mit BC und BD in einer Ebene.

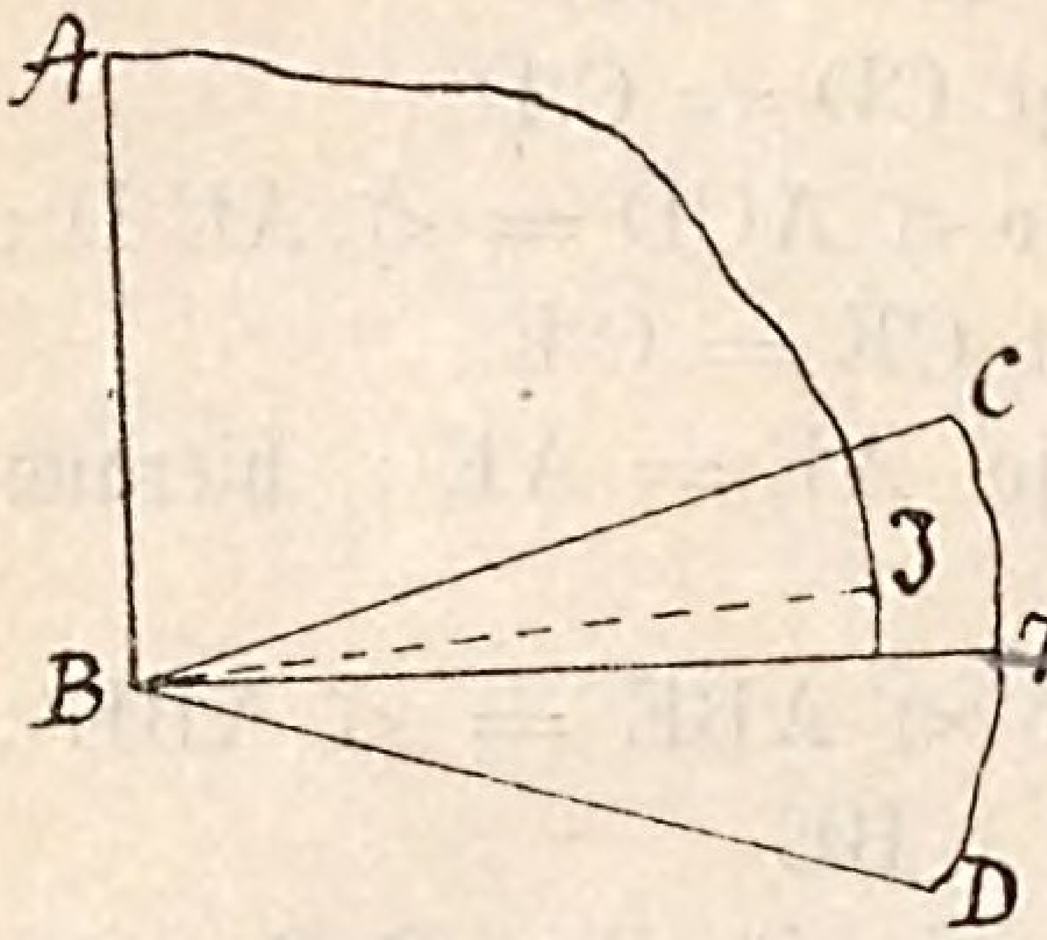


Fig. 2.

Zusatz. Alle Geraden, die auf einer Geraden in einem ihrer Punkte senkrecht stehen, liegen in einer Ebene.

Der geometrische Ort aller Geraden, welche in einem Punkte auf einer Geraden senkrecht stehen, ist eine Ebene, welche in diesem Punkte auf der Geraden senkrecht steht. Denn die Annahme, eine durch denselben Punkt gehende und außerhalb dieser Ebene liegende Gerade stehe auch auf der Geraden senkrecht, führt zu derselben Ungereimtheit wie der Beweis von 3.

4.

Lehrsätze. a) Von einem Punkte außerhalb einer Ebene gibt es auf diese nur eine Senkrechte. Beweis. Denn bei Annahme zweier Senkrechten kann man durch dieselben eine Ebene legen, welche die gegebene Ebene längs einer Geraden schneidet. Die drei Geraden bilden ein Dreieck, welches nach 2 eine Ungereimtheit enthält.

b) In einem Punkte einer Ebene gibt es auf derselben nur eine Senkrechte. (Beweis wie bei a.)

c) Die Senkrechte von einem Punkte auf eine Ebene ist die kürzeste Linie vom Punkte zu irgend einem Punkte der Ebene. Beweis. Denn legt man durch die Senkrechte und irgend eine andere Verbindungslinie des Punktes mit einem Punkt der Ebene eine Ebene, so entsteht ein Dreieck, in welchem nach 2 die Senkrechte als Kathete, die andere Verbindungslinie als Hypotenuse erscheint.

Die von einem Punkte auf eine Ebene gefällte Senkrechte wird der Abstand des Punktes von der Ebene genannt und als Maß der Entfernung des Punktes von der Ebene benützt.

d) Zwei von einem Punkte gegen eine Ebene gezogene schiefe Geraden sind einander gleich oder ungleich, wenn die Abstände ihrer Fußpunkte vom Fußpunkte der vom gegebenen Punkte auf die Ebene gefällten Senkrechten einander gleich oder ungleich sind; im zweiten Falle ist diejenige Schiefe die größere, bei welcher der Abstand größer ist. Beweis. Legt man durch die Senkrechte und je eine Schiefe je eine Ebene, so entstehen nach 2 rechtwinklige Dreiecke, aus denen sich der Satz leicht ergibt.

e) (Umkehrung von d). Sind zwei Punkte einer Ebene von einem Punkte B derselben Ebene gleich oder ungleich weit entfernt, so sind sie auch von einem beliebigen Punkte der in B auf der Ebene errichteten Senkrechten gleich oder ungleich weit entfernt. (Beweis wie in d.)

Uebungssätze. α) Die Fußpunkte aller schiefen Geraden, welche von demselben Punkte außerhalb einer Ebene zur Ebene führen und gleich lang sind, erfüllen eine Kreislinie. Wo ist deren Mittelpunkt?

β) Der geometrische Ort aller Punkte, welche von den Punkten einer Kreislinie gleich weit entfernt sind, ist die Senkrechte, welche man im Mittelpunkt des Kreises auf der Ebene derselben errichtet.

γ) Der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei Punkten A und B gleichweit entfernt sind, ist eine Ebene, welche im Halbierungspunkte C der Strecke AB auf AB senkrecht steht. Man beweise zuerst, daß jeder Punkt J der Ebene von A und B gleich weit entfernt ist, indem man auch JC zieht; dann beweise man, daß jeder außerhalb der Ebene liegende Punkt von A und B ungleich entfernt ist.

5.

Lehrsätze. a. Steht von 2 Parallelen die eine auf einer Ebene senkrecht, so steht auch die andere auf der Ebene senkrecht.

Voraussetzung. AB $\#$ CD; AB $\perp$ Eb MN.

Behauptung. CD $\perp$ Eb MN.

Gemäß 2 muß bewiesen werden, daß CD senkrecht steht auf zwei durch D gehenden Geraden der Ebene. Man lege durch AB und CD eine Ebene, welche MN längs DB schneidet,

so ist nach 2 AB $\perp$ BD, also, da CD $\#$ AB, auch CD $\perp$ DB. Um noch eine Gerade zu erhalten, mache man in Eb (MN) DJ $\perp$ DB, mache DJ gleich einem beliebigen Stück von AB, also DJ = BF, ziehe JB und DF, so ist $\triangle$ DBF $\cong$ $\triangle$ DJB, woraus DF = JB. Zieht man noch JF, so ist $\triangle$ DFJ $\cong$ $\triangle$ JFB, woraus $\sphericalangle$ FDJ = $\sphericalangle$ FBJ; da aber nach 2 FB $\perp$ JB, so ist auch $\sphericalangle$ FDJ = R, oder DJ $\perp$ DF; da schon DJ $\perp$ DB, so ist nach 2 DJ $\perp$ Eb BDF, also auch DJ $\perp$ DC, da DC in Eb DFB liegt. Da nun CD $\perp$ DJ und CD $\perp$ DB, so ist CD $\perp$ Eb MN.

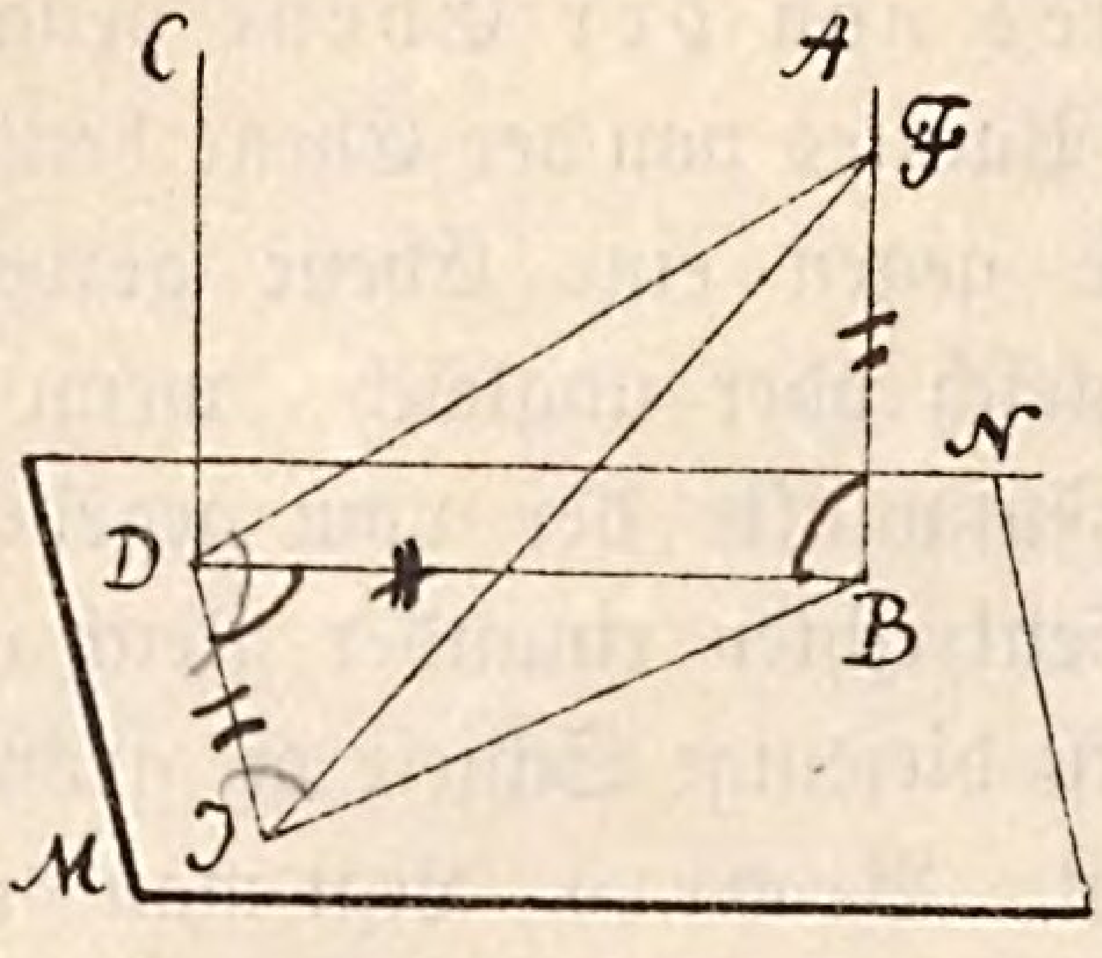


Fig. 3.

b. Umkehrung. Stehen zwei Gerade auf derselben Ebene senkrecht, so sind sie parallel.

Beweis. Wäre die zweite nicht parallel der ersten, so könnte man durch ihren Fußpunkt zur ersten eine Parallele legen; diese müßte nach 5 a auch senkrecht auf der Ebene stehen, also hätte man in demselben Punkte zwei Senkrechte auf der Ebene, was unmöglich ist, 4 b.

c. Sind zwei Gerade einer dritten parallel, so sind sie unter sich parallel. (Der Beweis braucht sich in der Stereometrie bloß auf den Fall zu beschränken, daß die 3 Geraden nicht in einer Ebene liegen, schließt aber den andern Fall von selbst ein).

Beweis. Man lege eine Ebene senkrecht zur dritten Geraden, so ist nach 5 a sowohl die erste als auch die zweite Gerade senkrecht zur Ebene, also sind nach 5 b beide Geraden parallel.

6.

Erklärung. Einen Punkt auf eine Ebene projizieren heißt, von dem Punkte auf die Ebene eine Senkrechte fällen und den Fußpunkt dieser Senkrechten bestimmen. Der Fußpunkt wird die Projektion des Punktes auf die Ebene genannt.

Eine Linie auf eine Ebene projizieren heißt, sämtliche Punkte der Linie auf die Ebene projizieren und aus den Projektionen wieder eine stetige Linie bilden; diese wird dann die Projektion der Linie genannt.

Um eine Gerade oder eine Strecke auf eine Ebene zu projizieren, genügt es, zwei Punkte der Geraden, oder die Endpunkte der Strecke auf die Ebene zu projizieren und die erhaltenen Projektionen durch eine Gerade zu verbinden; diese Gerade P ist dann die Projektion.

Denn die angegebenen zwei Senkrechten liegen, da sie nach 5b parallel sind in einer Ebene, welche einerseits die zu projizierende Gerade enthält, anderseits die gegebene Ebene längs der Geraden P schneidet.

In derselben Ebene liegt aber auch jede andere Senkrechte, die einen Punkt der Geraden projiziert, denn sie geht durch einen Punkt der Ebene und ist nach 5b parallel den die Ebene bestimmenden Senkrechten. Alle diese Senkrechten erfüllen demnach die Ebene und treffen deshalb die gegebene Ebene in Punkten der Geraden P. P ist demnach der geometrische Ort der Projektionen der Punkte der gegebene Geraden, also ist P die Projektion der Geraden auf die Ebene.

Die Ebene, welche die Projizierenden der Punkte einer Geraden enthält, heißt die projizierende Ebene der Geraden.

Schneidet eine Gerade die Ebene, so ist die Projektion der Geraden auf die Ebene die Verbindungslinie des Fußpunktes der Geraden mit der Projektion eines ihrer Punkte. Beweis ebenso.

7.

Gerade schief zu einer Ebene.

Lehrsatz. Steht eine Gerade schief zu einer Ebene, so ist unter all den Winkeln, welche sie mit den durch ihren Fußpunkt gehenden Geraden der Ebene bildet, derjenige der kleinste, welchen sie mit ihrer Projektion bildet, und derjenige der größte, welchen sie mit der Rückwärtsverlängerung der Projektion bildet.

Beweis. Hat man den Punkt A zur Bildung der Projektion benützt, so daß AC $\perp$ Eb MN und BC die Pro-

jektion von AB, so nehme man durch B eine beliebige Gerade BD der Ebene, mache BD = BC und ziehe AD, so sind in den Dreiecken ABC und ABD zwei Seiten gleich, die dritten AC und AD aber nach 4c ungleich, so daß AC < AD; folglich ist ∢ ABC < ∢ ABD.

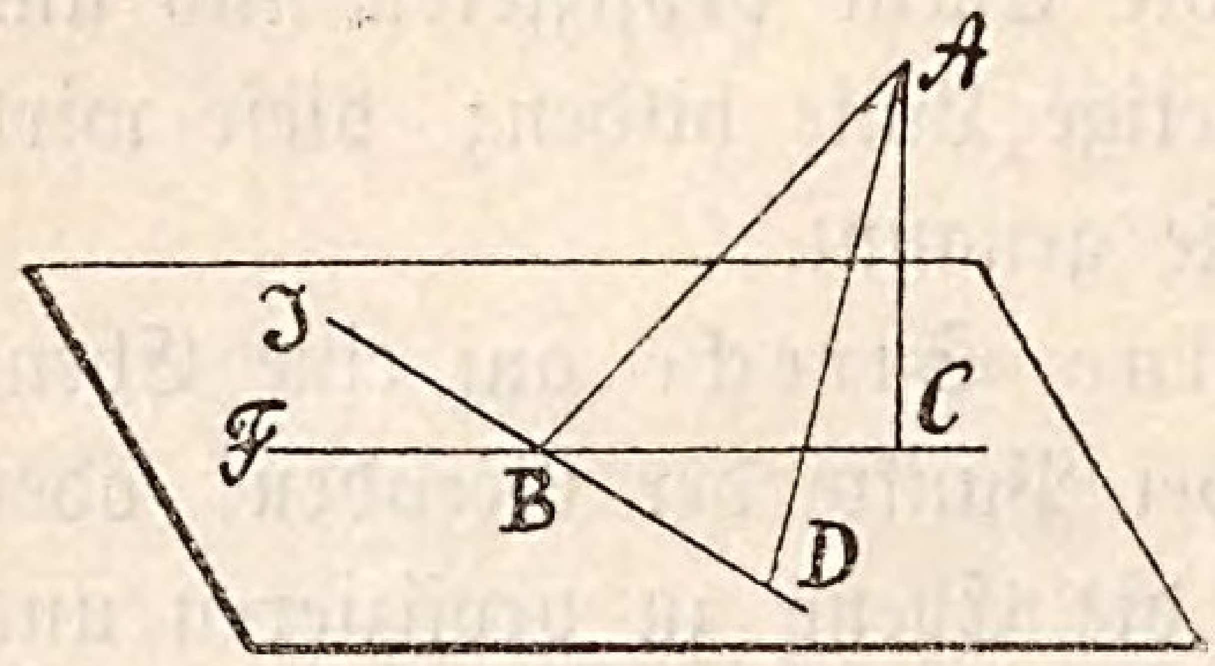


Fig. 4.

Um zu zeigen, daß ABF der größte Winkel ist, bemerke man zunächst, daß er Nebenwinkel also supplementär zu ABC ist, bilde dann auch von BD die Rückwärtsverlängerung BJ, so ist auch ABJ > ABC; da nun die Winkel ABD und ABJ auch supplementär und beide größer als ABC sind, so folgt, daß jeder von ihnen kleiner als das Supplement ABF von ABC ist.

Erklärung. Der Winkel, den eine Gerade mit ihrer Projektion bildet, nennt man den Neigungswinkel der Geraden und mißt durch ihn die Neigung der Geraden gegen die Ebene.

Uebungssätze. α) Beschreibt man, um den Fußpunkt einer schiefen Geraden in der Ebene einen Kreis, so ist ein beliebiger Punkt der Schiefen demjenigen Punkt der Kreislinie am nächsten (oder fernsten), in welchem der Kreis von der Projektion der Schiefen auf die Ebene (oder von deren Rückwärtsverlängerung) getroffen wird.

β) Der Winkel, welchen eine Schiefe mit einem durch ihren Fußpunkt gehenden Strahl der Ebene bildet, wird größer, wenn der Winkel des Strahles mit der Projektion der Schiefen größer wird, erreicht aber einen Grenzwert, wenn der Strahl mit der Rückwärtsverlängerung der Projektion zusammenfällt.

8.

Lehrsätze. a. Der Winkel, welchen eine Schiefe mit einem auf ihrer Projektion senkrechten Strahl der Ebene bildet, ist ein Rechter, oder: eine Schiefe steht senkrecht auf einer in der Ebene liegenden Geraden, wenn ihre Projektion auf dieser Geraden senkrecht steht.

Beweis: Sei AB die Schiefe, AC ⊥ Eb MN, also BC die Projektion von AB und DE ⊥ BC in Eb MN, so soll

bewiesen werden, daß AB $\perp$ DE. Man mache BE = DB, so ist $\triangle$ BCE $\cong$ $\triangle$ BCD, also CE = CD; mittels 2 folgt $\triangle$ AEC $\cong$ $\triangle$ ADC, also AE = AD; hieraus folgt $\triangle$ ABE $\cong$ $\triangle$ ABD, also $\sphericalangle$ ABE = $\sphericalangle$ ABD = R.

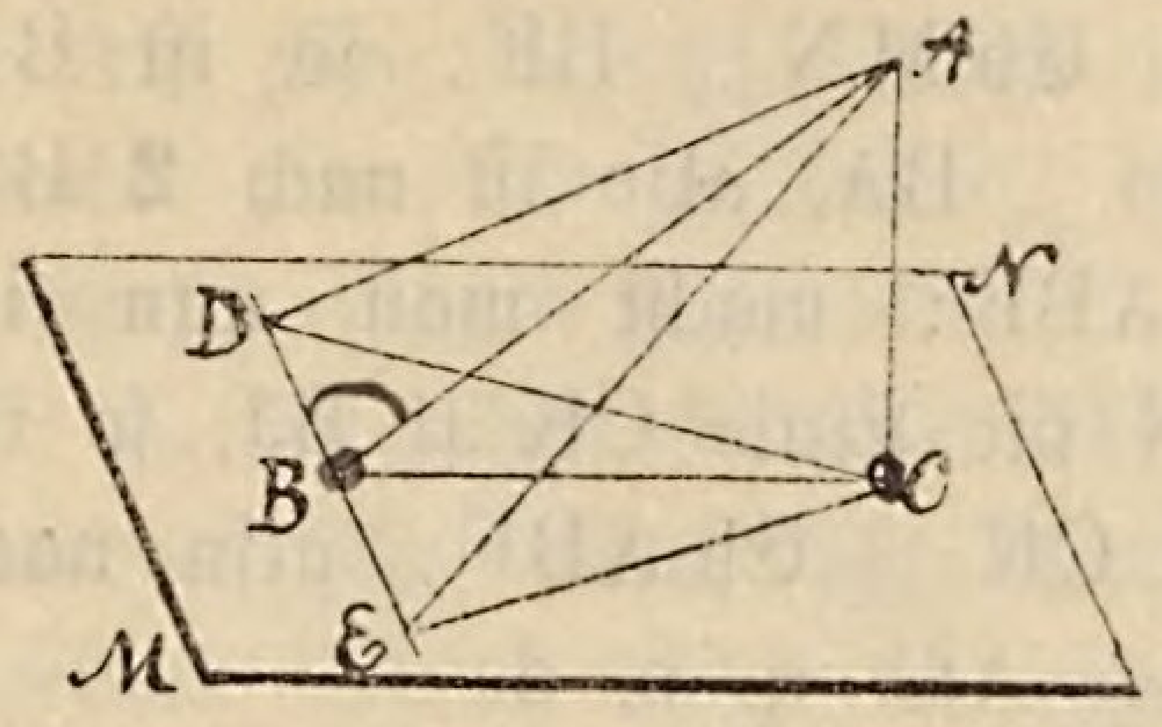


Fig. 5.

b. Umkehrung: Steht eine Schiefe senkrecht auf einer Geraden der Ebene, so steht auch ihre Projektion senkrecht auf dieser Geraden; oder: fällt man von einem beliebigen Punkte außerhalb einer Ebene eine Senkrechte auf eine in der Ebene liegende Gerade und eine Senkrechte auf die Ebene, so steht die Verbindungslinie der beiden Fußpunkte senkrecht auf der in der Ebene liegenden Geraden.

Beweis analog 8a.

Verallgemeinerung: Ist ein System von Punkten fest verbunden mit einer in einer Ebene (Tafel) liegenden Geraden (Kante) und wird dieses System um diese Gerade gedreht, so beschreiben die Projektionen der Punkte des Systems auf die Ebene (Tafel) gerade Linien, welche senkrecht stehen auf der in der Ebene liegenden Geraden (Kante), die Projektionen beschreiben Kantenlote; auf einer solchen Senkrechten (Kantenlot) liegt auch der Punkt selbst, wenn das System so weit gedreht wird, bis der Punkt in die Ebene (Tafel) fällt.

Zusatz. Stehen zwei Schiefe senkrecht auf derselben oder auf zwei parallen Geraden einer Ebene, so sind ihre Projektionen parallel, sie fallen in dieselbe Richtung, wenn die Schiefen einen Punkt gemeinsam haben.

c. Steht eine Schiefe senkrecht auf einer in der Ebene liegenden Geraden A, und errichtet man im Fußpunkt auf der Geraden A in der Ebene eine Senkrechte, so ist diese Senkrechte die Projektion der Schiefen auf die Ebene. Beweis indirekt durch b.

d. Die von irgend einem Punkt einer Schiefen auf ihre Projektion gefällte Senkrechte steht auf der Ebene senkrecht.

Beweis: Sei AB die Schiefe, BF ihre Projektion, und AC in Eb ABF senkrecht BF, so soll bewiesen werden, daß AC senkrecht Eb MN; hiezu ist nur notwendig, daß AC auf

noch einer Geraden der Ebene senkrecht stehe. Man mache BJ in Eb MN ⊥ BF, so ist BJ nach a ⊥ BA, also ist nach 2 BJ ⊥ Eb ABF; macht man nun in Eb MN die Linie CK ⋕ BJ, so ist nach 5 CK ⊥ Eb ABF, also nach 2 CK ⊥ AC q. e. d.

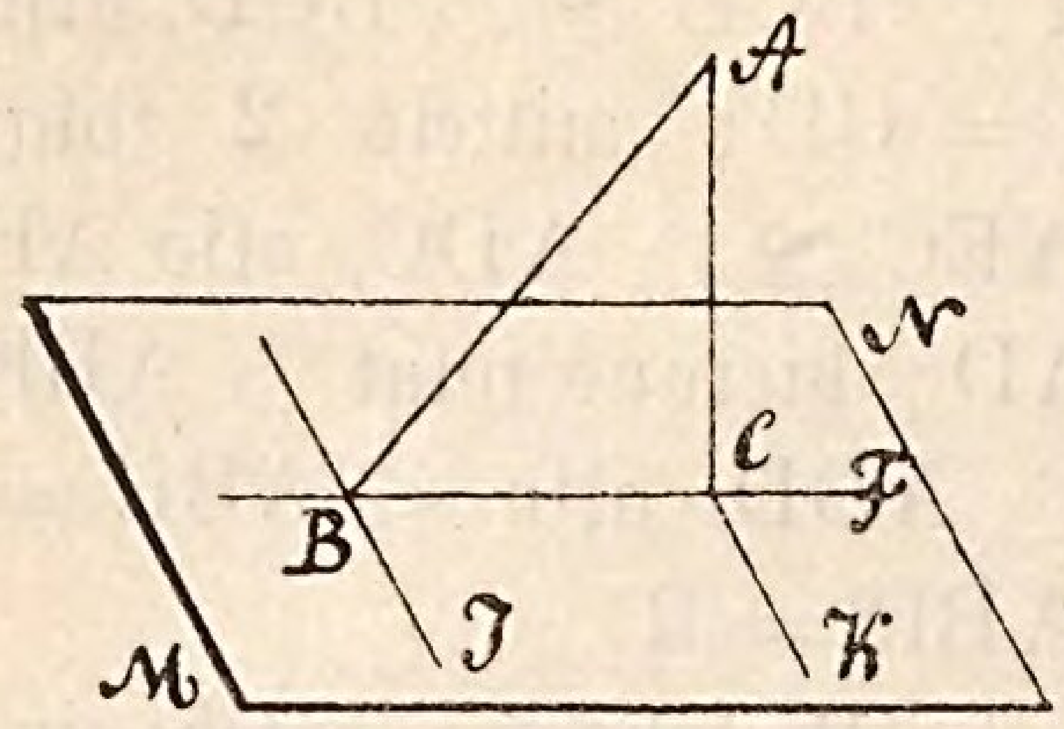


Fig. 6.

Konstruktion: Dieser Satz bietet die Möglichkeit von einem Punkte A außerhalb einer Ebene auf dieselbe eine Senkrechte zu fällen. Man ziehe in MN eine beliebige Gerade BJ, lege durch A und BJ eine Ebene, fälle in derselben von A auf BJ eine Senkrechte AB, errichte dann im Fußpunkte B auf BJ in der Ebene MN die Senkrechte BF, lege durch BF und BA die Ebene ABF und fälle in dieser Ebene von A auf BF die die Senkrechte AC, so ist AC nach d ⊥ Eb MN.

Man errichte in einem Punkte der Ebene auf dieselbe eine Senkrechte.

9.

Gerade parallel einer Ebene.

Erklärung. Eine Gerade und eine Ebene sind parallel, heißt, sie haben keinen Punkt gemeinsam, so weit man sie auch erweitern mag.

Lehrsätze. a. Eine Gerade ist einer Ebene parallel, wenn sie nur einer in der Ebene liegenden Geraden parallel ist. (Jede durch eine von zwei parallelen Geraden gelegte Ebene ist der anderen Geraden parallel, oder enthält sie. Oder: Ist eine Gerade der Achse eines Ebenenbüschels parallel, so ist sie jeder Ebene desselben parallel.)

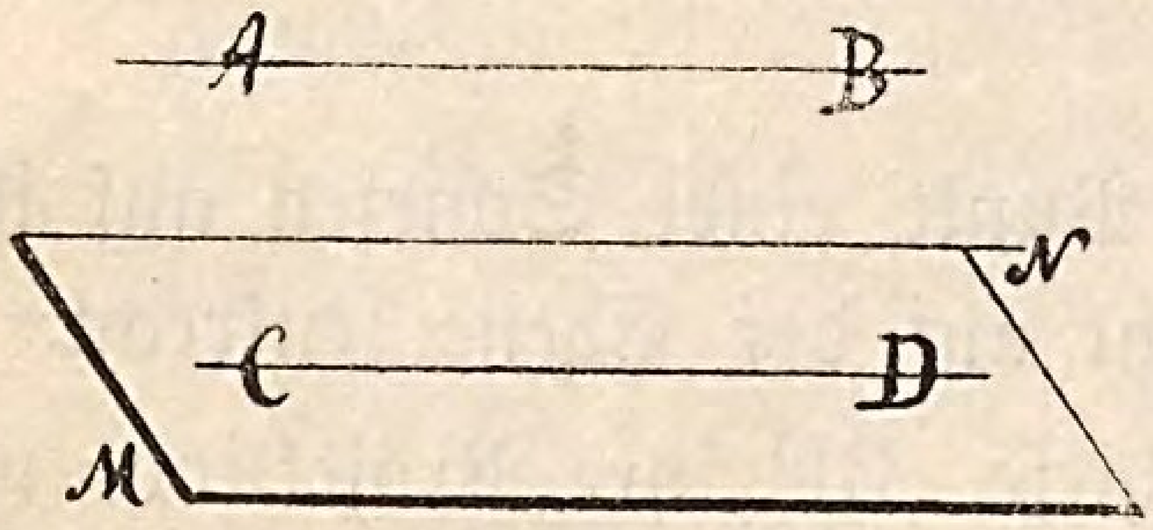


Fig. 7.

Beweis. Es sei AB diejenige Gerade, welche außerhalb der Ebene MN liegt und zu der in der Ebene liegenden CD parallel ist. Man kann nun durch AB und CD nach 1 eine Ebene legen. Sollte nun AB die Ebene MN schneiden,

so könnte dies nur in einem Punkte der Eb ABCD geschehen, da AB ganz in dieser Ebene liegt; es müßte deshalb in einem Punkte von CD geschehen, was gegen die Voraussetzung ist. Deshalb ist AB || Eb MN.

b. Ist eine Gerade (A) parallel einer Ebene (E_1), so schneidet jede durch die Gerade (A) gelegte Ebene (E_2) die gegebene Ebene (E_1) in einer zur gegebenen Geraden (A) parallelen Geraden (B).

Beweis. Denn da A die Ebene nicht schneidet, so schneidet sie auch die in der Ebene liegende Gerade B nicht, und da sie mit B in einer Ebene liegt, so ist sie parallel B.

Allgemein: Ein Ebenenbüschel, dessen Achse (A) parallel einer Ebene (E_1) ist, schneidet diese Ebene in einem System von Geraden (B), welche unter sich und zur Achse parallel sind.

Uebungssätze: α) Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht und errichtet man in einem beliebigen Punkte der Geraden auf ihr eine Senkrechte, so ist diese parallel der Ebene. Beweis durch **2** und **9** a.

β) Die Projektion einer Geraden auf eine parallele Ebene ist der Geraden parallel. Beweis mittels **6**.

γ) Ein rechter Winkel projiziert sich auf eine Ebene wieder als rechter Winkel, wenn nur ein Schenkel des Winkels der Ebene parallel ist. Beweis: Man erweitert die Ebene des rechten Winkels, bis sie die gegebene Ebene längs einer Geraden schneidet und wendet auf sie **9** b, **8** b und **5** c an.

δ) Die Ebenen zweier Ebenenbüschel, deren Achsen parallel sind, schneiden sich in Geraden, welche unter sich und den Achsen parallel sind.

ε) Legt man durch je zwei von drei parallelen Geraden Ebenen, so ist jede Ebene parallel derjenigen Geraden, welche sie nicht enthält.

ζ) Hat man auf zwei sich schneidenden Ebenen je ein System von Geraden, welche alle dem Durchschnitt der Ebenen parallel sind, so ist jede Ebene, welche durch eine Gerade des einen und eine des andern Systems gelegt wird, dem Durchschnitt parallel.

c. Sind zwei Ebenen E_1 und E_2 einer Geraden A parallel, so ist auch ihr Durchschnitt B der Geraden A parallel. Beweis indirekt. Es sei B nicht || A, so könnte man durch A und einen Punkt von B eine Ebene legen; diese müßte E_1 längs G_1 und E_2 längs G_2 schneiden, und es wäre nach **9** b sowohl

G_1 als $G_2 \parallel A$, was unmöglich, da G_1 und G_2 einen Punkt gemeinsam haben. Oder direkt: Man legt durch A eine beliebige Ebene, welche E_1 und E_2 längs Geraden schneidet, wendet 9a, b und 5c an.

Wenn sich 3 Ebenen so schneiden, daß von den 3 Durchschnittslinien zwei einander parallel sind, so ist auch die 3. Durchschnittslinie dazu parallel. Beweis durch 9a und b.

II. Abschnitt.

Gegenseitige Lage zweier Ebenen.

10.

Neigung zweier Ebenen.

Erklärung. Gehen von einer Geraden zwei Ebenen aus und zwar nur nach je einer Richtung, so bilden die Ebenen einen Flächenwinkel; man versteht darunter die Größe der Drehung, welche die eine Ebene um die gemeinschaftliche Gerade machen muß, um mit der anderen Ebene zusammenzufallen.

Liegen beide Ebenen auf einander und dreht man die eine so lange, bis sie wieder mit der anderen zusammenfällt, so nennt man diese Drehung eine ganze Umdrehung und bezeichnet sie wie in der Planimetrie mit 4 R (4 rechte Winkel). Dreht man die eine Ebene so lange, bis sie mit der Rückwärtserweiterung der ersten Ebene zusammenfällt, so nennt man dies eine halbe Umdrehung, oder einen gestreckten Flächenwinkel und bezeichnet seine Größe mit 2 R.

Dreht man die eine Ebene so lange bis sie gerade die Hälfte einer halben Umdrehung gemacht hat, so nennt man diesen Winkel einen rechten Winkel, sagt, die zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, und benützt den rechten Winkel als Maß aller anderen Flächenwinkel.

Wie in der Planimetrie teilt man den rechten Winkel in 90 gleiche Teile oder Grade, jeden Grad in 60 Minuten, jede Minute in 60 Sekunden.

Um den Flächenwinkel bequem messen zu können, benützt man den **Neigungswinkel**; darunter versteht man den **Winkel zwischen zwei Geraden, die in je einer Ebene liegen und auf dem Durchschnitt in einem Punkte desselben senkrecht stehen.**

Um die Erlaubtheit dieses Maßes nachzuweisen, beweist man folgende Sätze:

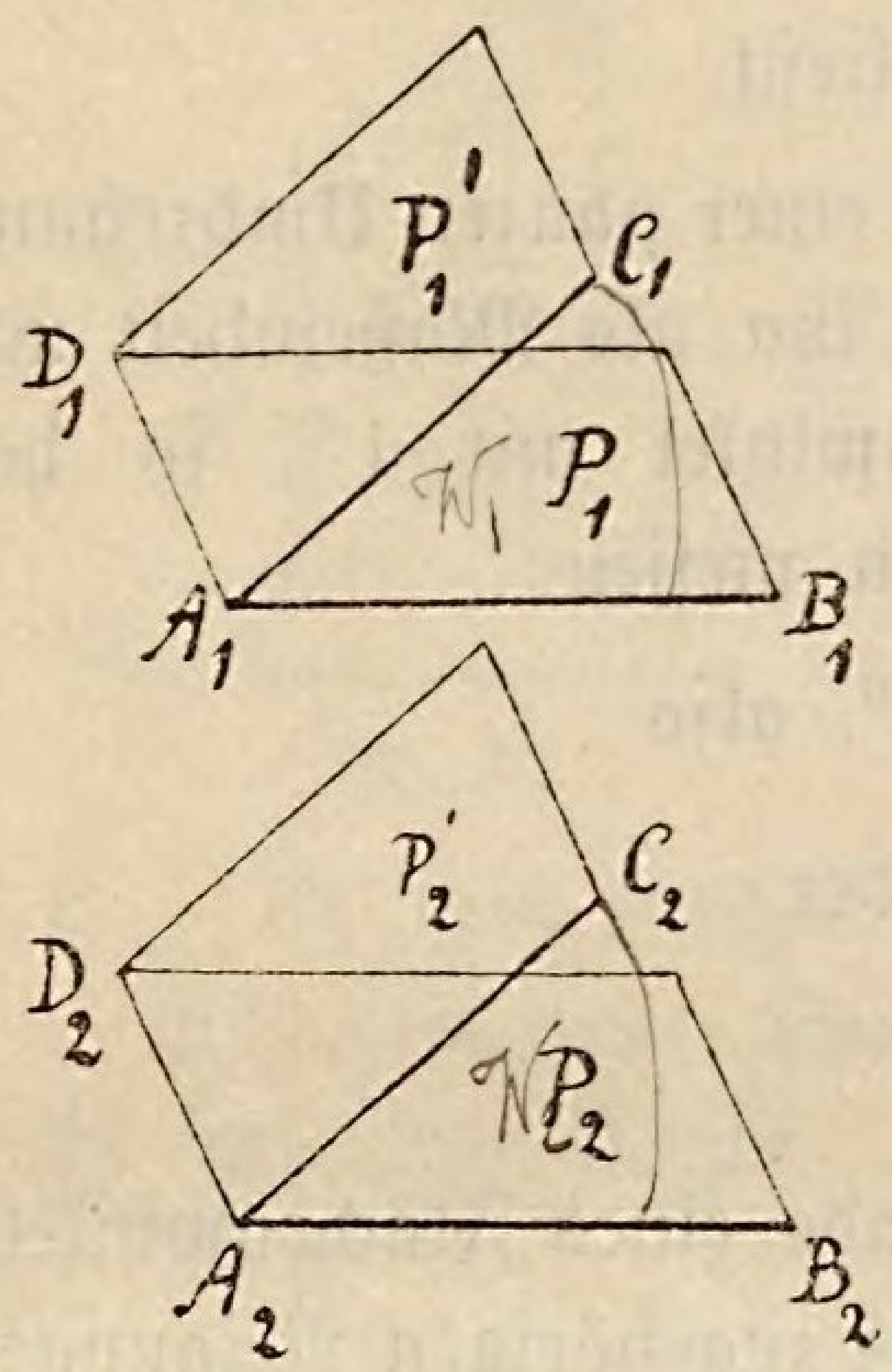


Fig. 8.

a. Sind zwei Flächenwinkel gleich, so sind auch ihre Neigungswinkel gleich.

Die Ebenen des ersten Flächenwinkels W_1 seien P_1 und P'_1; es sei ferner $A_1B_1 \perp A_1D_1$ und $A_1C_1 \perp A_1D_1$, so daß $\sphericalangle B_1A_1C_1$ der zu W_1 gehörige Neigungswinkel; entsprechende Bezeichnungen und Bestimmungen seien für den zweiten Flächenwinkel W_2 eingeführt, so daß $B_2A_2C_2$ dessen Neigungswinkel ist. Man lege nun den Winkelraum des zweiten Flächenwinkels W_2 so in den Winkelraum des ersten Flächenwinkels, daß A_2 auf A_1, A_2D_2 in die Richtung von A_1D_1 und Eb P_2 in die Eb P_1 fällt, so muß auch Eb P'_2 ganz in Eb P'_1 fallen, da die Flächenwinkel gleich sind; nun fällt A_2B_2 in die Richtung von A_1B_1, da beide auf $AD \perp$ stehen; ebenso fällt A_2C_2 in die Richtung von A_1C_1 aus demselben Grunde; folglich ist

$$\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle B_2A_2C_2, \text{ q. e. d.}$$

b. Zwei Flächenwinkel W_1 und W_2 verhalten sich wie die zugehörigen Neigungswinkel a_1 und a_2.

Beweis: Sind W_1 und W_2 commensurabel, so sucht man für sie ein gemeinschaftliches Maß w_1, dasselbe sei in W_1 x mal, in W_2 y mal enthalten, so daß $W_1 = x \cdot w$, $W_2 = y \cdot w$, also auch $W_1 : W_2 = xw : yw = x : y$.

Da nun sowohl W_1 als W_2 in gleiche Teile w geteilt sind, so werden dadurch nach a auch die zugehörigen Neigungs=

winkel in gleiche Teile geteilt; nennt man einen solchen Teil der Neigungswinkel α, so ist

$a_1 = x\alpha$, $a_2 = y\alpha$, also auch

$a_1 : a_2 = x\alpha : y\alpha = x : y$; also durch Vergleichung:

$W_1 : W_2 = a_1 : a_2$, q. e. d.

Sind die Flächenwinkel incommensurabel, so wird der Beweis ebenso vervollständigt, wie man sonst vom Commensurablen auf das Incommensurable schließt.

Nennt man nun den 360ten Teil einer ganzen Umdrehung einen Flächenwinkelgrad und bezeichnet ihn als Maßeinheit mit 1 Gr. und den zugehörigen Neigungswinkel mit 1^0, so hat man, um irgend einen Flächenwinkel zu messen:

$$W_1 : 1 \text{ Gr.} = a_1^0 : 1^0, \text{ also}$$

$$W_1 = \frac{a_1^0}{1^0} \cdot 1 \text{ Gr. oder}$$

$$W_1 = a_1 \text{ Gr.}$$

Das heißt: Die Maßzahl der Grade eines Flächenwinkels ist gleich der Maßzahl der Grade seines zugehörigen Neigungswinkels.

In diesem Sinne sagt man: der Flächenwinkel wird gemessen durch seinen Neigungswinkel, oder noch mehr abgekürzt: der Flächenwinkel ist gleich seinem Neigungswinkel.

Wegen der innigen Verwandtschaft zwischen Flächenwinkel und Neigungswinkel hat man für beide dieselbe Maßeinheit, 1 Grad, und sogar dieselbe Bezeichnung eingeführt, sagt also: Der Winkel zwischen zwei Ebenen beträgt 30^0, oder $17^0 12' 16''$ ꝛc.

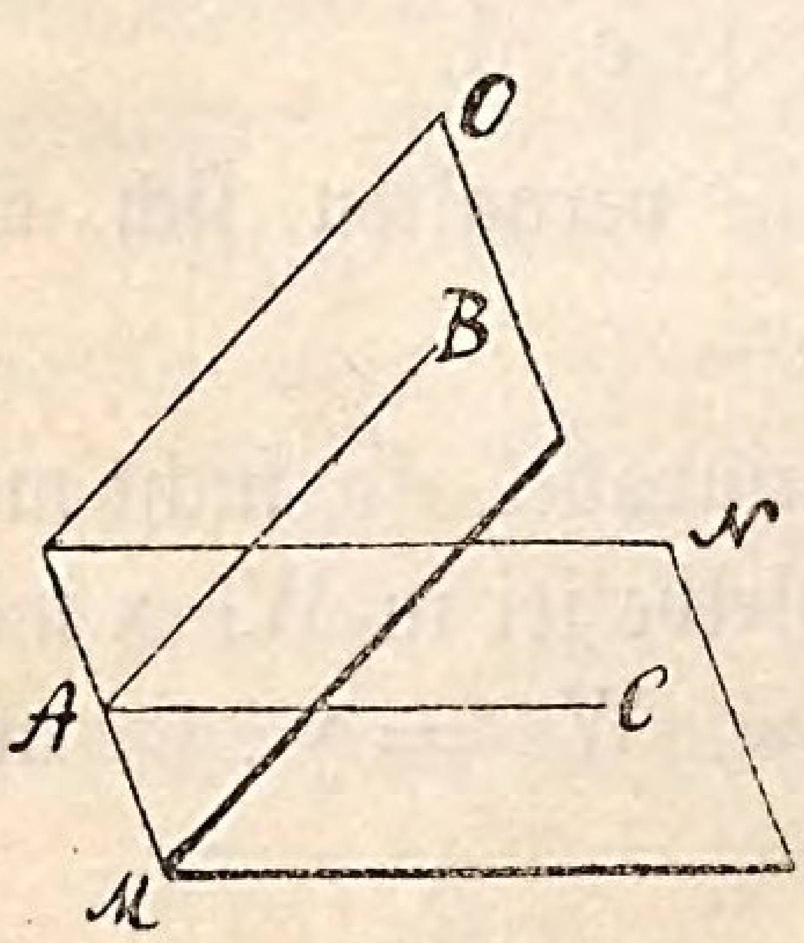


Fig. 9.

Ist $AC \perp AM$ und $AB \perp AM$, so ist $\sphericalangle BAC$ der Neigungswinkel zwischen den Ebenen MN und MO. Die durch AC und AB gelegte Ebene steht nach 2 senkrecht AM und wird die Ebene des Neigungswinkels genannt.

11.

Senkrechte Ebenen.

Erklärung. Zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn ihr Flächenwinkel ein Rechter ist.

Lehrsätze. a. Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so steht auch jede durch die Gerade gelegte Ebene senkrecht auf der Ebene.

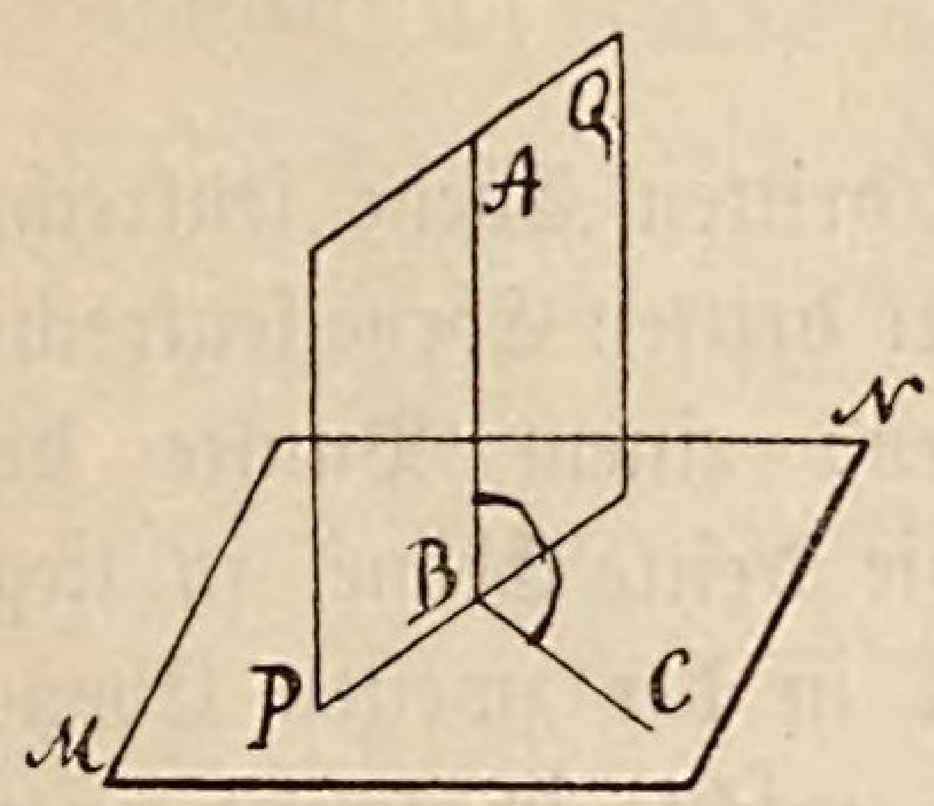


Fig. 10.

Beweis: Es sei AB $\perp$ Eb MN und Eb PQ durch AB gelegt, so soll bewiesen werden, daß Eb PQ $\perp$ Eb MN.

Man mache in Eb MN die BC $\perp$ BP, so ist, da nach 2 auch auch AB $\perp$ BP, $\sphericalangle$ ABC der Neigungswinkel; dieser ist aber, da (nach 2) AB $\perp$ BC, ein Rechter.

Allgemein: Steht die Achse eines Ebenenbüschels senkrecht auf einer Ebene, so steht jede Ebene desselben senkrecht zur Ebene.

Zusatz. Steht eine Gerade senkrecht zu einer Ebene, so steht auch jede zur Geraden parallele Ebene senkrecht zur Ebene. Beweis durch 9b, 5a, 11a.

b. Stehen zwei Ebenen auf einander senkrecht und errichtet man in der einen auf den Durchschnitt eine Senkrechte, so steht diese auf der anderen senkrecht.

Beweis. Es sei Eb (PQ) $\perp$ Eb MN, AB in Eb (PQ) und AB $\perp$ PB, so ist zu beweisen, daß AB $\perp$ Eb MN. Da AB schon senkrecht steht auf einer Geraden der Ebene, nämlich $\perp$ PB, so muß man beweisen, daß sie auf noch einer Geraden senkrecht steht; man ziehe also in Eb (MN) BC $\perp$ PB, so ist $\sphericalangle$ ABC der Neigungswinkel der Ebenen, also ein Rechter, d. h. AB $\perp$ BC; dann 2.

c. Stehen zwei Ebenen auf einander senkrecht und zieht man durch irgend einen Punkt der einen Ebene eine Senkrechte auf die andere Ebene, so liegt diese ganz in der einen Ebene.

Beweis. Läge die Senkrechte nicht ganz in der ersten Ebene, so könnte man in der ersten Ebene durch den Punkt

eine Senkrechte auf den Durchschnitt ziehen; diese stünde dann senkrecht zur zweiten Ebene (nach b), also hätte man durch den Punkt zwei Senkrechte auf die zweite Ebene, was unmöglich ist.

Zusatz. Eine Gerade und eine Ebene sind parallel, wenn beide auf einer Ebene senkrecht stehen. (Oder: Stehen zwei Ebenen auf einander senkrecht, so ist jede zur einen Ebene senkrechte Gerade der andern Ebene parallel). Beweis durch **11**c, **5**b, **9**a.

d. Stehen zwei Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht, so steht auch ihre Durchschnittslinie auf der dritten Ebene senkrecht.

Beweis. Fällt man von irgend einem Punkte der Durchschnittslinie eine Senkrechte auf die dritte Ebene, so liegt diese nach c sowohl in der ersten als in der zweiten Ebene, ist also der Durchschnitt. (Oder: Man errichte in irgend einem Punkt der dritten Ebene auf ihr eine Senkrechte, so ist **11**c Zus. **9**c, **5**a.)

Zusatz 1. Stehen drei Ebenen auf einander senkrecht, (abgek. anstatt: Stehen von drei Ebenen je zwei aufeinander ⊥) so stehen auch ihre Durchschnitte auf einander senkrecht (abgek. anst. 2c.); und umgekehrt: Stehen drei sich schneidende Gerade auf einander senkrecht, so stehen auch die durch sie (durch je zwei) gelegten Ebenen auf einander senkrecht (a).

Zusatz 2. Stehen von zwei Ebenen jede auf einer von zwei sich schneidenden Geraden senkrecht, so steht ihr Durchschnitt auf der durch die Geraden bestimmten Ebene senkrecht.

Man beachte noch Folgendes:

Die Ebene, welche eine Gerade auf eine Ebene projiziert (die projizierende Ebene **6**), steht auf der Ebene senkrecht.

Die Ebene des Neigungswinkels einer schiefen Geraden (**7**), steht auf der Ebene senkrecht. (Hieraus folgt leicht **8**d.)

Schneiden sich zwei Ebenen, so steht jede auf der Ebene ihres Neigungswinkels (**10**) senkrecht.

12.

Parallele Ebenen.

Definition. Zwei Ebenen heißen parallel, wenn sie beliebig erweitert sich nicht schneiden.

Lehrsätze. a. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Schnittlinien parallel.

Beweis. Da die Ebenen parallel sind, so ist die Annahme, daß die Schnittlinien, die ja den Ebenen angehören, einen Punkt gemeinsam haben, unzulässig, und da die Schnittlinien in einer Ebene liegen, so sind sie parallel. (Eine teilweise Umkehrung des Satzes liefert den Uebungssatz von **9**c, eine vollständige das Erkennungsmerkmal paralleler Ebenen **12**d.)

b. Durch einen Punkt gibt es zu einer Ebene nur eine parallele Ebene. Bew. ind. indem man durch den Punkt eine schneidende Ebene legt und a anwendet.

c. Zwei Ebenen sind parallel, wenn eine Gerade auf beiden senkrecht steht.

Beweis. Es seien A und B die Fußpunkte der Geraden auf den Ebenen E_1 und E_2. Wären die Ebenen nicht parallel, so müßten sie sich längs einer Geraden schneiden. Man könnte dann irgend einen Punkt C der Schnittlinie sowohl mit A als auch mit B verbinden, AC müßte dann ganz in E_1, CB ganz in E_2 liegen, und man hätte ein Dreieck ABC, welches nach **2** sowohl in A als in B rechtwinklig wäre. Da dies unmöglich ist, so ist die Annahme, daß E_1 und E_2 sich schneiden, unzulässig.

d. Zwei Ebenen sind parallel, wenn die Schenkel zweier in ihnen liegenden Winkel bezüglich parallel sind.

Beweis. Es sei $AC \parallel A_1C_1$, $BC \parallel B_1C_1$, so ist zu beweisen, daß Eb $ABC \parallel$ Eb $A_1B_1C_1$.

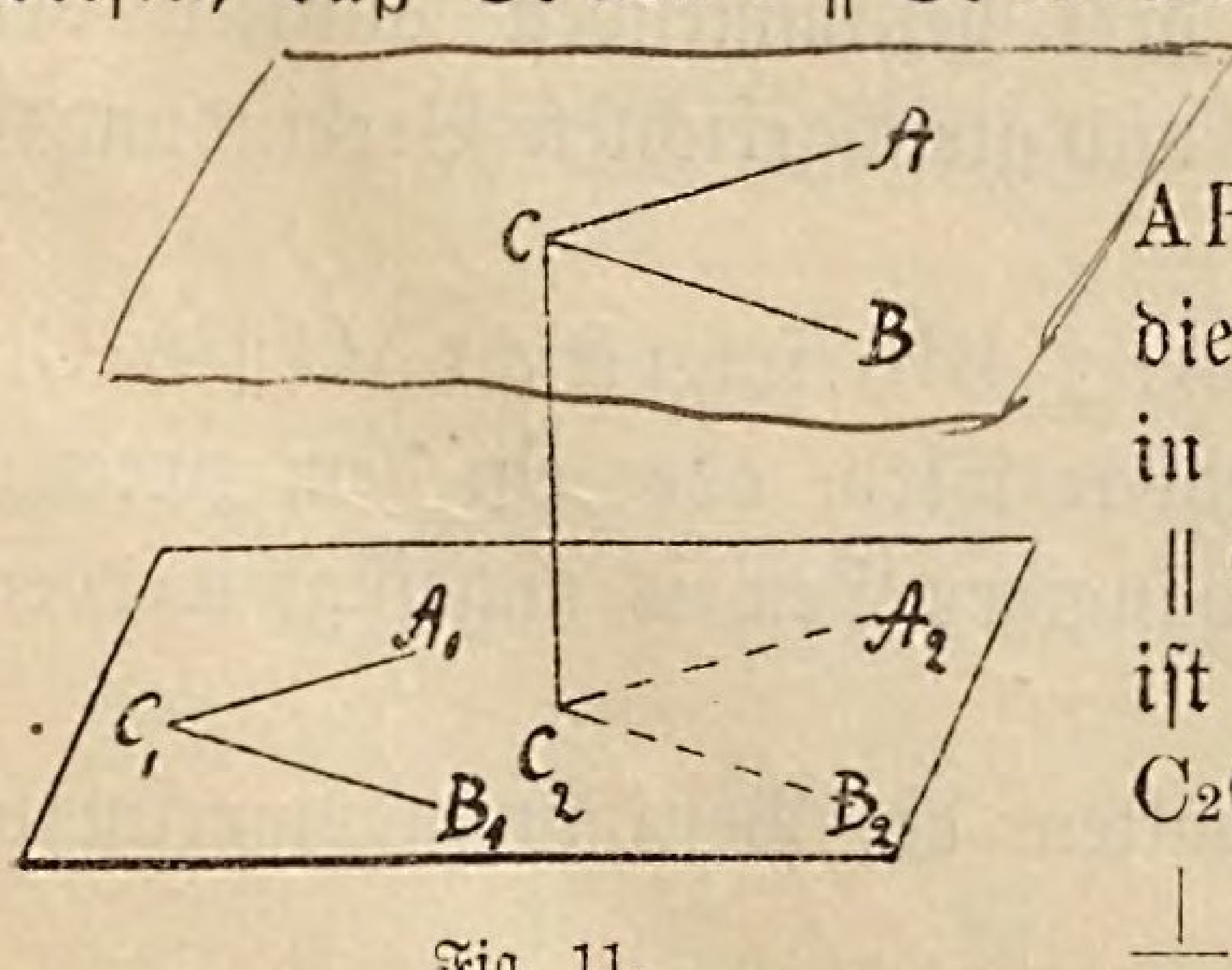


Fig. 11.

Man errichte in C auf Eb ABC die Senkrechte CC_2, welche die Eb $A_1B_1C_1$ in C_2 trifft, und in Eb $A_1B_1C_1$ ziehe man $C_2A_2 \parallel C_1A_1$ und $C_2B_2 \parallel C_1B_1$. Dann ist nach **5**c $C_2A_2 \parallel CA$; da aber $C_2C \perp CA$ (**2**), so ist auch $C_2C \perp C_2A_2$. Ebenso beweist man, daß $C_2C \perp C_2B_2$; somit ist

$C_2C \perp$ Eb $A_1B_1C_1$ (2). Da also CC_2 senkrecht steht auf den zwei Ebenen, so sind sie nach c parallel.

Dieser Satz kann auch unabhängig von c bewiesen werden.

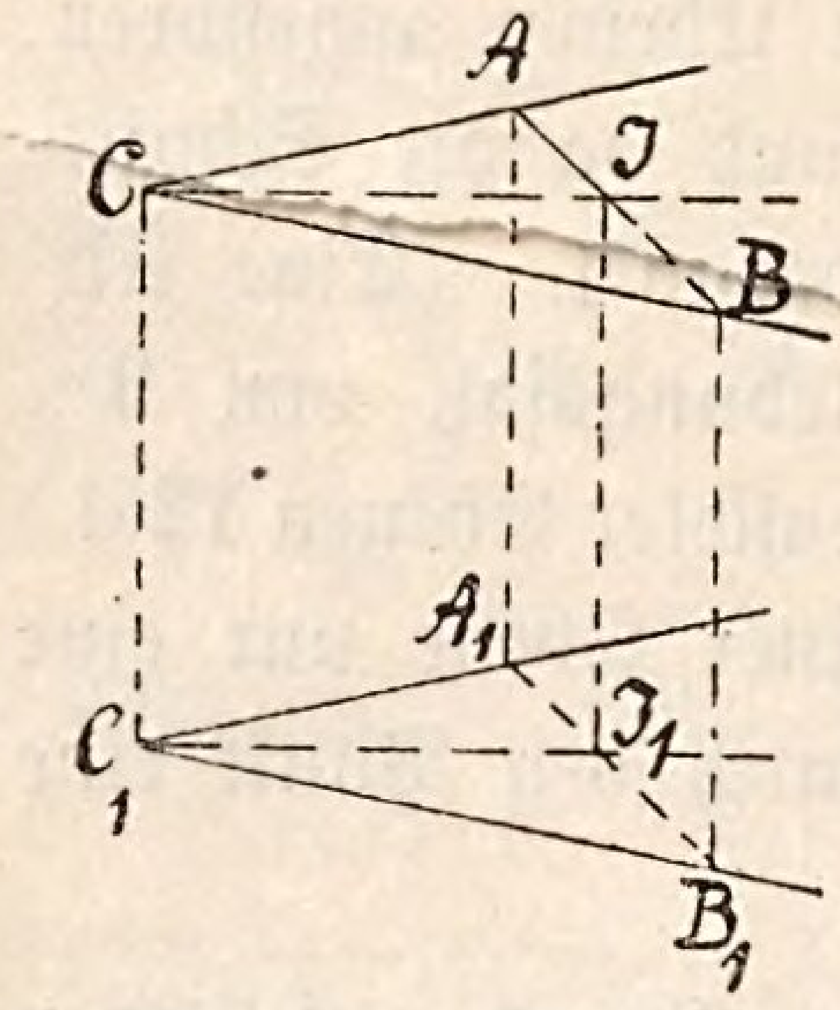


Fig. 12.

Es seien CA und CB die Geraden der einen Ebene, C_1A_1 und C_1B_1 die parallelen Geraden der anderen Ebene. Macht man nun $CA = C_1A_1$, $CB = C_1B_1$ und zieht CC_1, AA_1 und BB_1, so beweist man, daß $AA_1 \underline{\parallel} CC_1$, $BB_1 \underline{\parallel} CC_1$, also $AA_1 \underline{\parallel} BB_1$, somit auch $AB \underline{\parallel} A_1B_1$. Zudem ist nach **9** a $CC_1 \parallel$ Eb AA_1BB_1. Nimmt man nun an, die Ebenen CAB und $C_1A_1B_1$ schneiden sich in einem Punkte, so kann man durch ihn und CC_1 eine Ebene legen, welche die Eb (ACB) längs CJ, die Eb ($A_1C_1B_1$) längs C_1J_1 schneiden möge, also die Ebene ABA_1B_1 längs JJ_1 schneidet. Es ist dann $JJ_1 \parallel CC_1$ nach **9** b, aber $CC_1 \parallel AA_1$, also auch $JJ_1 \parallel AA_1$; und da $AJ \parallel A_1J_1$, so ist AJJ_1A_1 ein Parallelogramm, also $JJ_1 = AA_1$; da aber $AA_1 = CC_1$, so folgt $JJ_1 = CC_1$, und es ist demnach CJJ_1C ein Parallelogramm. Dies ist aber unvereinbar mit der Annahme, daß CJ und C_1J_1 durch einen gemeinsamen Punkt der Ebenen gehe, folglich sind die Ebenen parallel.

Als Folge dieses Beweises kann Lehrsatz c als ein spezieller Fall von d betrachtet und durch ihn bewiesen werden.

e. Zwei Ebenen sind parallel, wenn drei bestimmende Punkte der einen Ebene mit drei bestimmenden Punkten der anderen Ebene gleiche, parallele und gleichgerichtete Verbindungslinien haben.

B e w e i s. Aus $CC_1 \underline{\parallel} AA_1 \underline{\parallel} BB_1$, folgt leicht $AC \parallel A_1C_1$, $BC \parallel B_1C_1$, wodurch d anwendbar wird, oder ein dem zweiten Beweise von d analoger unabhängiger Beweis angefügt werden kann.

Die Sätze c, d, e enthalten die Bestimmungsmerkmale paralleler Ebenen.

f. Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie

unter sich parallel. Beweis. Man errichte auf der dritten Ebene eine senkrechte Gerade, so wird c anwendbar.

g. Sind die Schenkel zweier Winkel im Raume parallel, so sind die Winkel einander gleich. Folgt als Zusatz aus dem 2. Beweis von d. Beschränkung wie in der Planimetrie.

13.

Lehrsätze. a. Steht eine Gerade senkrecht auf der einen von zwei parallelen Ebenen, so steht sie auch senkrecht auf der anderen.

Beweis. Es sei Eb $E_1 \parallel$ Eb E_2 und die Gerade $P \perp$ Eb E_1. Man lege durch P eine beliebige Ebene E_3, so schneidet sie die Ebenen E_1 und E_2 nach Geraden A_1 und A_2, welche nach **12**a parallel sind; da $P \perp A_1$ nach **2**, so ist auch $P \perp A_2$. Legt man durch P noch eine Eb E_4, so ist auch $P \perp B_2$, folglich $P \perp$ Eb E_2. (Oder indirekter Beweis mittels **12**c und b.)

Zusatz. Eine Gerade, welche senkrecht steht auf der einen von zwei sich schneidenden Ebenen, steht nicht senkrecht auf der anderen.

Zur Übung. Steht eine Gerade senkrecht auf der einen von zwei sich schneidenden Ebenen, so ist ihr Neigungswinkel gegen die andere komplementär zum Flächenwinkel der Ebenen.

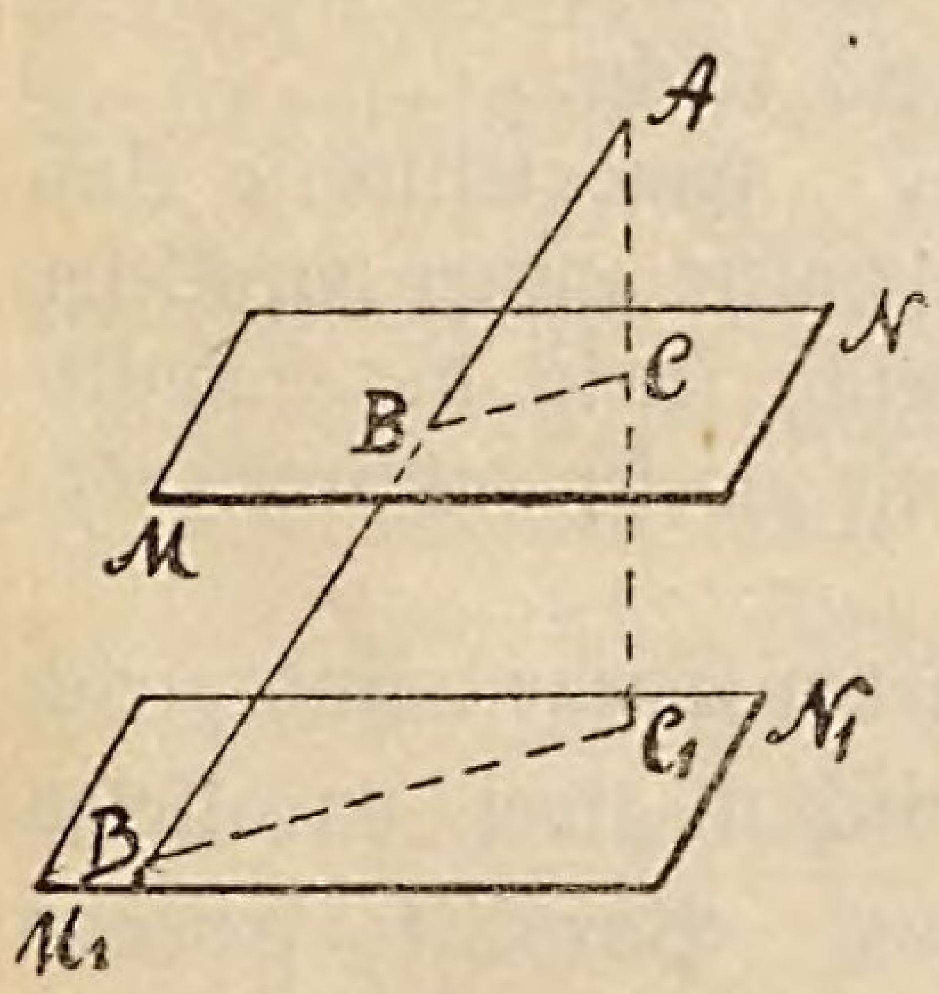


Fig. 13.

b. Eine Schiefe ist gegen zwei parallele Ebenen gleich geneigt.

Beweis. Von einem beliebigen Punkte A macht man $AC_1 \perp$ Eb M_1N_1, so ist nach a $AC \perp$ Eb MN, legt man Ebene $A_1B_1C_1$, so ist auf die Schnittlinien BC und B_1C_1 **7** und **12**a anwendbar.

Umkehrung: Hat eine Schiefe in Bezug auf zwei Ebenen dieselbe Projektionsebene und gleiche Neigung, so sind die Ebenen parallel.

c. Steht eine Ebene senkrecht auf der einen von zwei parallelen Ebenen, so steht sie auch senkrecht auf der anderen.

Beweis. Durch **11**b wird **13**a und **11**a anwendbar.

Umkehrung. Stehen zwei Ebenen auf einer dritten

senkrecht und schneiden sie die dritte in parallelen Linien, so sind die Ebenen parallel.

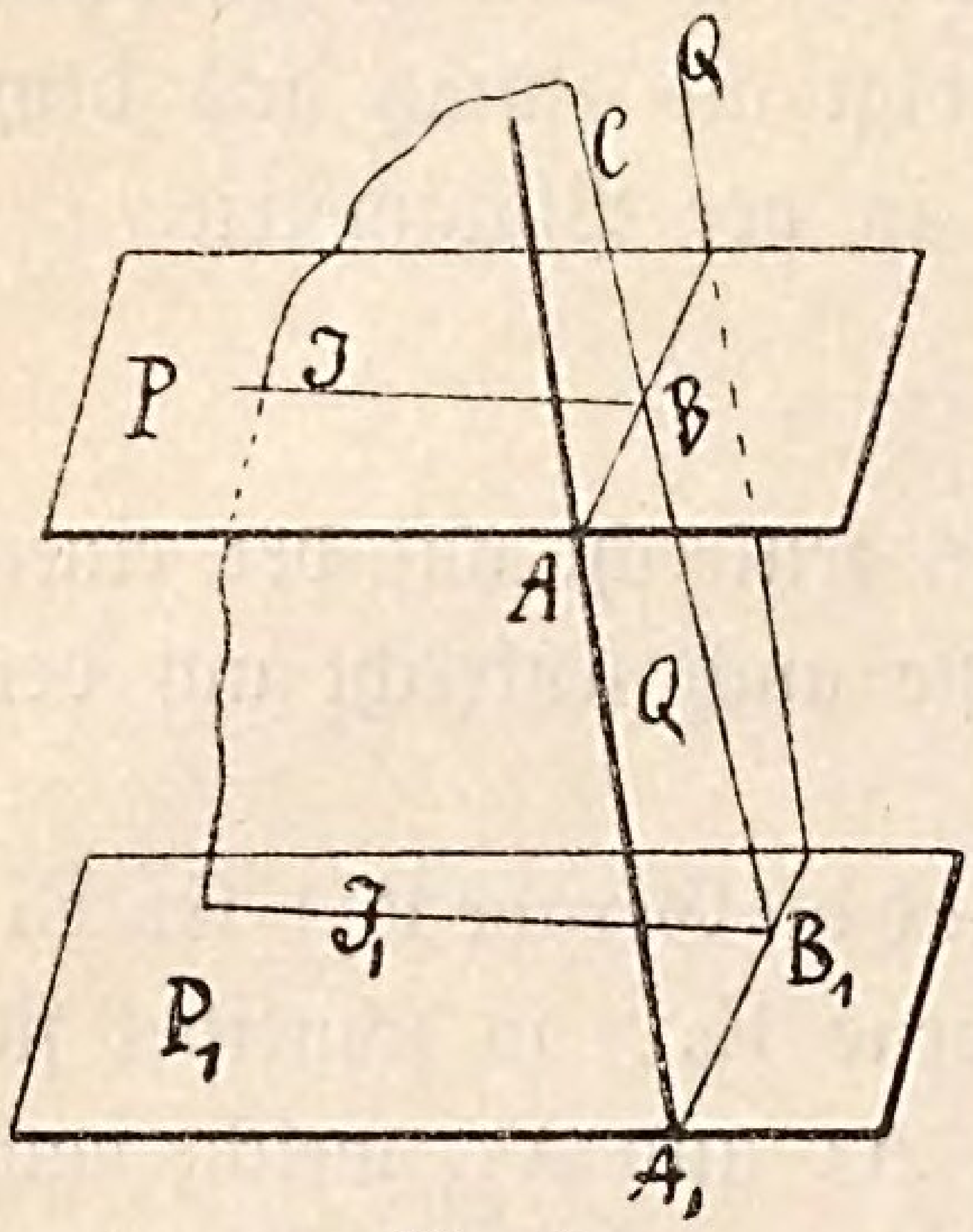


Fig. 14.

d. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so hat diese gegen die beiden Ebenen gleiche Neigung.

Beweis. Sei Q die dritte Ebene, welche die parallelen Ebenen P und P_1 längs AB und A_1B_1 schneidet, so ist $AB \parallel A_1B_1$. Um den Neigungswinkel von Q mit P und P_1 zu bekommen, lege man Ebene $R \perp AB$, so ist sie nach 5a auch $\perp A_1B_1$, und liefert durch die Schnittlinien mit P, P_1 und Q die Neigungswinkel JBC und J_1B_1C, welche, da nach **12a** $JB \parallel J_1B_1$, einander gleich sind.

Umkehrung. Bilden zwei Ebenen mit einer dritten Ebene zwei gleiche und gleichgerichtete Winkel und schneiden sie die dritte Ebene in parallelen Linien, so sind die Ebenen parallel.

e. Werden zwei parallele Ebenen von parallelen Geraden geschnitten, so sind die Abschnitte der Geraden zwischen den parallelen Ebenen einander gleich. Beweis leicht.

Der Satz ist die Umkehrung von **12**e. Eine teilweise Umkehrung liefert den Übungssatz: Sind die Abschnitte zweier parallelen Geraden zwischen zwei Ebenen einander gleich, so ist die Schnittlinie der Ebenen parallel der Verbindungslinie zweier entsprechender Fußpunkte der Parallelen.

Zusatz. Senkrechte zwischen parallelen Ebenen sind gleich lang. Die Länge einer Senkrechten zwischen zwei parallelen Ebenen nennt man den Abstand derselben. Parallele Ebenen haben überall denselben Abstand. (Umkehrung von **12**e.)

f. **Erklärung.** Zwei Gerade im Raume, welche sich nicht schneiden und auch nicht parallel sind, welche also nicht in einer Ebene liegen, nennt man zwei sich kreuzende Gerade, oder windschiefe Gerade.

Unter dem Winkel zweier sich kreuzenden Geraden versteht man den Winkel, welchen zwei durch irgend einen Punkt

gehende und zu den sich kreuzenden Geraden einzeln parallele Gerade bilden.

Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht sie dieser Erklärung gemäß nicht bloß auf allen durch ihren Fußpunkt gehenden, sondern auf allen in der Ebene liegenden Geraden, und auf allen zur Ebene parallelen Geraden senkrecht. Beweis leicht.

Sind zwei Ebenen parallel, so bildet eine die beiden Ebenen schneidende Gerade gleiche Winkel mit jedem Paar von Geraden, welche in den Ebenen liegen und parallel sind.

Lehrsätze zur Übung. 1. Gehen von drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten einer Ebene drei gleiche, parallele und nach derselben Seite gerichtete Strecken aus, so liegen die Endpunkte der Strecken in einer parallelen Ebene.

2. Hat man zwei Ebenen P und P_1, welche sich längs AB schneiden und zieht man in denselben von einem Punkte A des Durchschnittes aus zwei gleiche Strecken AS und AS_1, welche mit dem Durchschnitt die gleichen Winkel SAB = S_1AB bilden, so sind 1) die Verbindungsstrecken der Endpunkte S und S_1 mit einem beliebigen Punkte B des Durchschnittes einander gleich, und bilden gleiche Winkel mit dem Durchschnitt, und mit der Strecke SS_1, 2) hat die Strecke SS_1 gleiche Neigung gegen beide Ebenen, 3) steht die Strecke SS_1 senkrecht auf dem sie kreuzenden Durchschnitte.

3. Fällt man von einem Punkte innerhalb eines Flächenwinkels Senkrechte auf jede Ebene des Flächenwinkels, so ist der Winkel zwischen den Senkrechten supplementär zum Flächenwinkel.

Beweis. Man legt durch die Senkrechten eine Ebene, sucht die Schnittlinien derselben mit den beiden Ebenen, so erhält man ein 4Eck, welches nach **2** zwei rechte Winkel und nach **11** d und **10** den Neigungswinkel enthält.

4. In einer Ebene MN liegt eine Strecke AB; in der Mitte C derselben errichtet man CD $\perp$ Eb MN. Durch den Endpunkt D legt man eine Gerade parallel Eb MN und macht auf ihr DJ = DK; dann sind die Verbindungslinien JA und KB einander gleich und haben gleiche Neigung gegen Eb MN.

5) Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene E_1, so steht auch die Projektion der Geraden auf eine beliebige Ebene E_2 senkrecht auf dem Schnitt von E_1 und E_2.

Anhang I.

Konstruktionen.

Aufgaben zur Bestimmung eines geometrischen Ortes.

Man bestimme den geometrischen Ort eines Punktes,

1) welcher von einer Ebene einen gegebenen Abstand hat;
2) welcher von zwei Ebenen gleiche Entfernungen hat,
   α) wenn die Ebenen ∥ sind,
   β) wenn die Ebenen sich schneiden;
3) dessen Entfernungen von zwei Ebenen ein bestimmtes Verhältnis haben, α und β wie bei 2;
4) welcher von drei Ebenen, welche nicht alle drei parallel sind, gleiche Entfernungen hat, oder Entfernungen hat, welche sich wie p : q : r verhalten;
5) welcher in einer Ebene liegt, und von einem außer der Ebene liegenden Punkte eine gegebene Entfernung hat;
6) welcher von drei gegebenen Punkten gleiche Entfernungen hat;
7) welcher von zwei Punkten gleich weit absteht;
8) welcher in einer Ebene liegt, und von einer zur Ebene parallelen Geraden einen gegebenen Abstand hat.

Man bestimme den geometrischen Ort aller Geraden,

9) welche eine Gerade schneiden und einer anderen Geraden parallel sind;
10) welche eine Gerade schneiden und zu einer Ebene senkrecht stehen;
11) welche durch einen Punkt gehen und einer Ebene parallel sind;
12) welche durch einen Punkt gehen und zu einer Geraden senkrecht stehen;
13) welche eine Gerade schneiden und gegen eine Ebene eine gegebene Neigung haben;
14) welche eine Gerade schneiden und zu zwei Ebenen parallel sind;
15) welche eine Gerade schneiden, zu einer Geraden senkrecht stehen und einer Ebene parallel sind;

16) welche eine Gerade schneiden und zwei andere Gerade rechtwinklig kreuzen.

Man bestimme den geometrischen Ort aller Punkte,

17) welche in einer Ebene liegen und von einer anderen Ebene einen gegebenen Abstand haben,

18) welche in einer Ebene liegen und von zwei anderen Ebenen gleichen Abstand haben,

19) welche in einer Ebene liegen und deren Projektionen auf eine andere Ebene eine gegebene Gerade derselben erfüllen.

Konstruktionen.

Zu den Fundamentalaufgaben der räumlichen Konstruktion gehören folgende.

1. Durch einen Punkt auf eine Ebene eine Senkrechte ziehen, α wenn der Punkt außerhalb der Ebene, β wenn er in der Ebene liegt. Lösung siehe 8d.

2. Zu einer Geraden durch einen Punkt derselben eine senkrechte Ebene legen. Lösung: Durch die Gerade legt man zwei beliebige Ebenen, errichtet in ihnen je eine Senkrechte auf die Gerade und zwar im gegebenen Punkte, so bestimmen diese Senkrechten die gesuchte Ebene (2).

3. Auf einer Ebene eine senkrechte Ebene errichten.

Die Aufgabe ist unendlich vieldeutig wegen **11** a. Errichtet man eine Senkrechte auf die Ebene, so genügt jede durch sie gelegte Ebene der Aufgabe.

4. Zu einer Geraden eine parallele Gerade durch einen Punkt legen.

In der durch den Punkt und die Gerade bestimmten Ebene legt man durch den Punkt zur Geraden die Parallele.

5. Zu einer Geraden durch einen Punkt eine parallele Ebene legen.

Die Aufgabe ist unendlich vieldeutig nach **9** a. Legt man durch den Punkt zur Geraden eine Parallele, so genügt jede durch sie gelegte Ebene der Aufgabe.

6. Zu einer Ebene durch einen Punkt eine parallele Gerade ziehen.

Die Aufgabe ist unendlich vieldeutig nach 9a. Man legt durch den Punkt zu irgend einer Geraden der Ebene eine parallele Gerade.

7. Zu einer Ebene durch einen Punkt eine parallele Ebene legen.

Man legt durch den Punkt zu zwei beliebigen Geraden der Ebene zwei Parallele, so bestimmen diese die gesuchte Ebene 12d. (Andere Lösung mittels 12c oder e).

Mittels dieser Fundamentalkonstruktionen kann man durch Anwendung der Lehrsätze über gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen und unter Zuhülfenahme der geometrischen Örter folgende Aufgaben lösen.

Konstruktionsaufgaben.

1. Durch einen außerhalb einer Geraden liegenden Punkt eine zur Geraden senkrechte Ebene legen.

2. Durch einen in (außer) einer Ebene liegenden Punkt eine Ebene legen, welche auf der Ebene senkrecht steht und einer Geraden parallel ist.

3. Durch einen Punkt eine Ebene legen, welche auf zwei Ebenen senkrecht steht.

4. Durch eine Gerade eine Ebene legen, welche einer Geraden parallel ist.

5. Durch eine Gerade eine Ebene legen, welche auf einer Ebene senkrecht steht.

6. Durch einen Punkt in (außer) einer Ebene eine Gerade legen, welche unter einem gegebenen Winkel α gegen die Ebene geneigt ist.

7. Gegeben eine Ebene und eine dazu parallele Gerade. Man soll durch einen Punkt der Geraden eine Gerade legen, welche zur Geraden senkrecht steht und unter α^0 gegen die Ebene geneigt ist.

8. Gegeben eine Ebene und eine schiefe Gerade; man soll u. s. w. wie bei 7.

9. Eine Ebene legen, welche eine gegebene Ebene längs einer gegebenen Geraden schneidet und mit der Ebene einen Winkel α einschließt.

10. Gegeben eine Ebene und eine parallele (schiefe) Gerade; man soll durch die Gerade eine Ebene legen, welche gegen die Ebene eine vorgeschriebene Neigung hat.

11. Eine Gerade ziehen, welche parallel zwei gegebenen Ebenen sein soll, und durch einen Punkt geht.

12. Durch einen Punkt eine Ebene legen, welche parallel zu zwei sich kreuzenden Geraden ist.

13. Durch einen Punkt eine Gerade legen, welche zwei sich kreuzende Gerade schneidet.

14. Durch einen Punkt eine Gerade legen, welche eine Gerade schneidet und einer Ebene parallel ist.

15. In einem Punkt einer Geraden eine zu ihr senkrechte Gerade errichten, welche eine andere Gerade schneidet.

16. In einem Punkt einer Geraden auf ihr eine Senkrechte errichten, welche einer Ebene parallel ist.

17. Durch jede von zwei sich kreuzenden Geraden eine Ebene legen, so daß beide Ebenen parallel sind.

18. Eine Ebene legen, welche zwei sich kreuzenden Geraden in gleichem Abstand parallel ist.

19. Durch zwei sich kreuzende Gerade eine Gerade legen, welche auf beiden senkrecht steht. (Das Stück derselben zwischen ihren Fußpunkten mißt den Abstand der sich kreuzenden Geraden).

20. Durch einen Punkt eine Ebene legen, welche einer Geraden parallel ist und mit einer gegebenen Ebene einen Winkel α bildet.

21. Durch einen Punkt eine Ebene legen, welche zu einer Ebene senkrecht steht und mit einer anderen Ebene einen Winkel α bildet.

22. Durch einen Punkt einer Ebene eine Gerade legen, welche einer zweiten Ebene parallel ist und sich auf der ersten längs einer gegebenen Geraden projiziert.

23. Eine Gerade legen, welche eine gegebene Gerade rechtwinklig schneidet und sich auf einer gegebenen Ebene längs einer Geraden projiziert.

24. In einer Ebene eine Gerade ziehen, welche einer gegebenen Ebene in gegebenem Abstand parallel ist.

III. Abschnitt.

Das körperliche Eck.

14.

Erklärungen. Drei Ebenen, von denen keine zwei parallel sind, schneiden sich entweder in einer Geraden oder nur in einem Punkte. Im letzteren Falle schneiden sie sich zu zweien in 3 Geraden, welche durch den gemeinsamen Punkt gehen. Betrachtet man von diesen Geraden nur 3 Strahlen und von den Ebenen nur diejenigen Teile derselben, welche zwischen diesen Strahlen liegen, so wird der Raum, welcher von diesen Ebenen eingeschlossen wird, nach einer Seite hin aber unbegrenzt ist, ein körperliches Eck, ein körperlicher Winkel, ein körperliches Dreieck oder ein Dreikant genannt.

Drei unbegrenzte, sich in einem Punkte schneidende Ebenen bilden 8 Dreikante, von denen jedes mit dreien eine Ebene, mit dreien eine Kante und mit einem nur den Schnittpunkt der Ebenen gemeinsam hat.

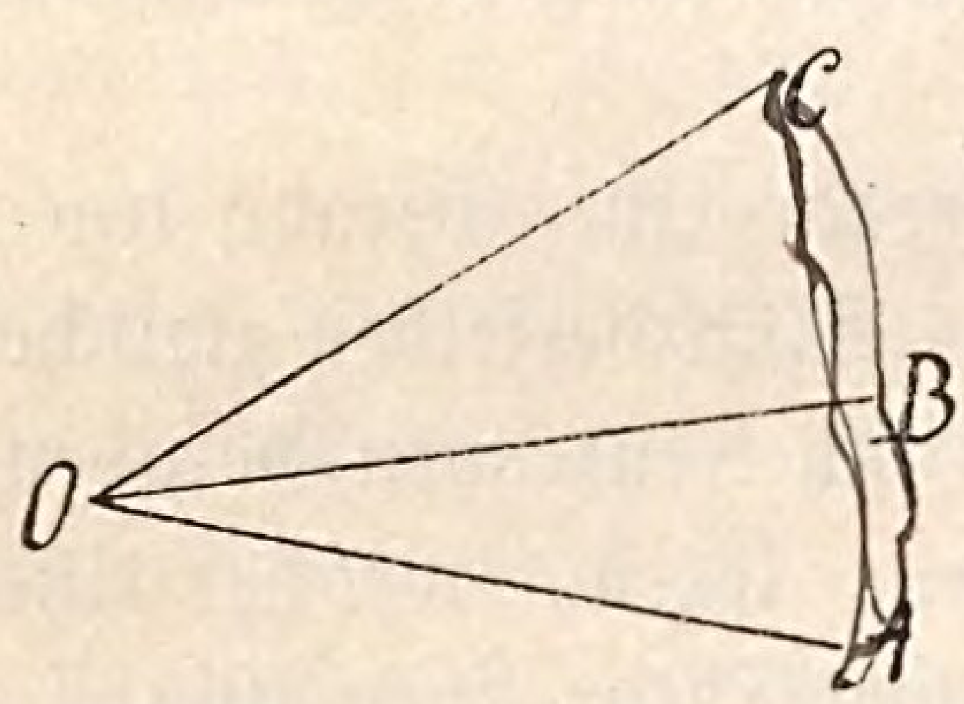


Fig. 15.

Der Punkt, in welchem sich die Ebenen schneiden, heißt der Scheitel, die Strahlen OA, OB, OC, in welchen sich je zwei Ebenen schneiden, heißen die Kanten, die Ebenen OAB, OBC, OCA heißen die Seitenflächen. Je zwei benachbarte Kanten schließen einen der drei Kantenwinkel oder Seiten ein, je zwei benachbarte Seitenflächen bilden einen der drei Flächenwinkel oder Winkel des körperlichen Eckes. Kanten- und Flächenwinkel können spitz oder stumpf sein, concave werden von der Betrachtung ausgeschlossen, da sie durch benachbarte ersetzt werden können.

Gehen durch einen Punkt mehr als drei Strahlen und legt man durch je zwei benachbarte, nachdem man eine gewisse Ordnung festgestellt hat, eine Ebene, so begrenzen dieselben ein mehrseitiges körperliches Eck, ein Vielkant.

Dabei wird zunächst vorausgesetzt, daß nicht eine Ebene eine andere innerhalb der sie bestimmenden Kanten schneidet,

weil sonst das Vielkant in mehrere Vielkante zerfällt. Dies fällt zusammen mit der Bestimmung, daß kein Flächenwinkel auf der dem Innenraum des Vielkants zugewendeten Seite concav sei, daß also das Vielkant keine einspringenden (concaven), sondern bloß ausspringende (convexe) Winkel habe.

Sind alle Kantenwinkel und alle Flächenwinkel eines körperlichen Eckes je einander gleich, so heißt das Eck regulär.

15.

Scheiteleck.

Verlängert man jede Kante eines körperlichen Eckes rückwärts über den Scheitel hinaus, und legt zwischen die Kanten die entsprechenden Ebenen, so bilden diese ein neues Eck, welches das Scheiteleck des gegebenen Eckes genannt wird.

Die Kanten- und Flächenwinkel eines Eckes sind den entsprechenden, gleichliegenden Kanten- und Flächenwinkeln des Scheiteleckes gleich.

Untersucht man, ob als Folge der Gleichheit der Winkel das Scheiteleck mit dem Ecke congruent sei, ob es also so in das Eck gelegt werden könne, daß sich die Grenzflächen vollständig decken, so zeigt sich, daß das im allgemeinen nicht erreicht werden kann.

Es sei nämlich im Eck OABC die Kante OA auf der dem Beschauer zugewendeten Seite, also vorn, OB auf der abgewendeten Seite, hinten, OC nach aufwärts gerichtet, so geht im Scheiteleck OA'B'C' die Kante OA' nach hinten, OB' nach vorn, OC' nach unten.

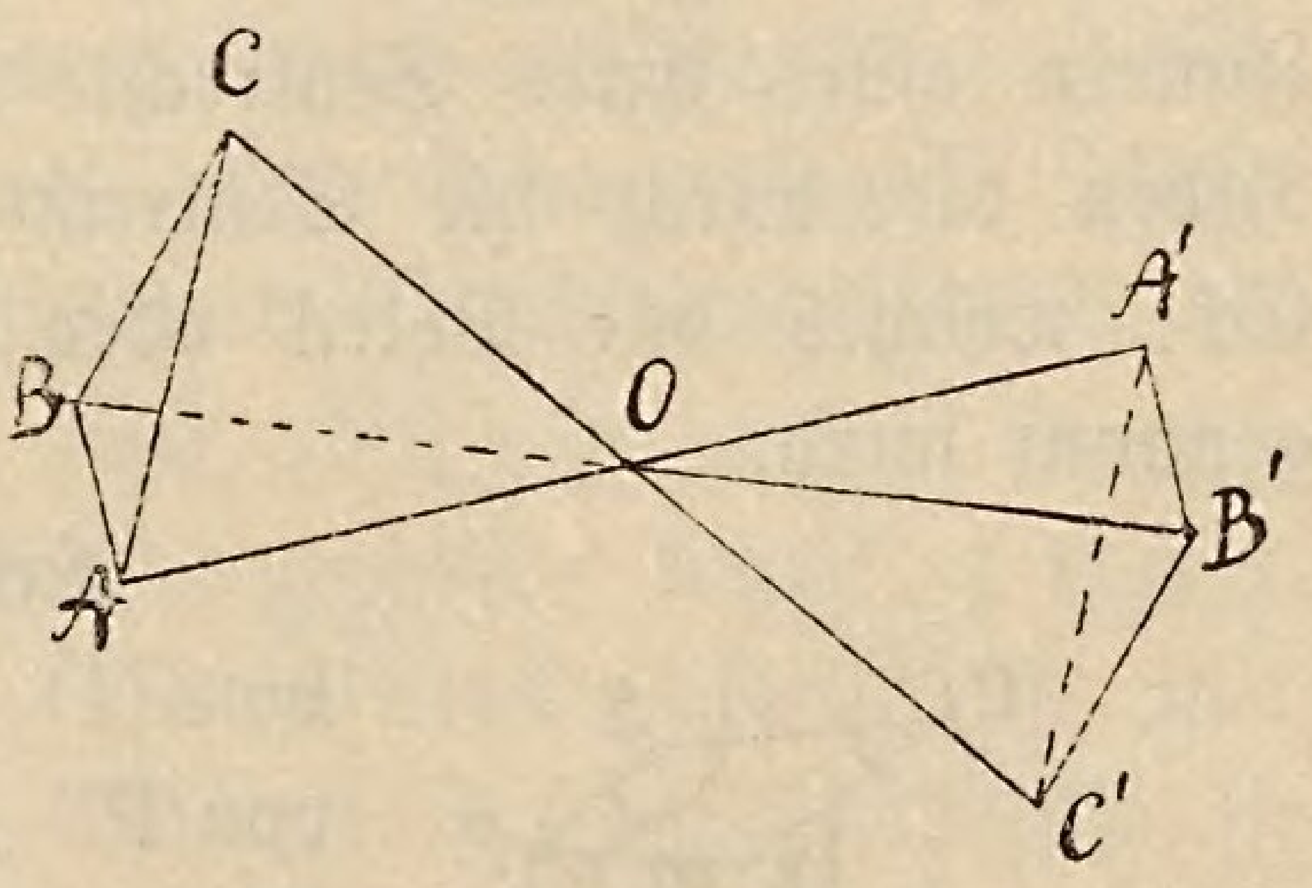


Fig. 16.

Will man nun das Scheiteleck in das gegebene Eck legen, so muß man es zuerst so umstürzen, daß die Kante OC' nach oben geht; dann geht OA' nach vorn, OB' nach hinten; der Scheitel O schaut aber immer noch nach links, während der des Eckes nach rechts schaut. Man muß also das Scheiteleck noch so umdrehen, daß der Scheitel O auch nach rechts sieht;

dadurch kommt aber OA′ nach hinten, OB′ nach vorn zu liegen. Legt man nun die Ecken so in einander, daß die Scheitel O, die Ebenen OAB und OA′B′ und die Kanten OA und OB′ zusammenfallen, so fallen auch die Kanten OB und OA′ zusammen, weil $\sphericalangle$ A′OB′ = $\sphericalangle$ AOB. Die anderen Seitenflächen fallen aber im allgemeinen nicht zusammen, weil an den aufeinanderliegen Kanten OA und OB′ (und ebenso an OB und OA′) zwei Flächenwinkel liegen, welche im allgemeinen nicht einander gleich sind. Eck und Scheiteleck sind also im allgemeinen nicht congruent.

Erklärung: Ecken, welche derart mit einander verwandt sind, daß ihre Kantenwinkel und Flächenwinkel bezüglich einander gleich sind aber bei gleichgerichtetem Scheitel nach entgegengesetzter Richtung angeordnet sind oder bei entgegengesetzt gerichtetem Scheitel in gleicher Richtung angeordnet sind, nennt man symmetrisch.

Zusatz. Jedes Eck ist symmetrisch zu seinem Scheiteleck. Symmetrische Ecken können stets so gelegt werden, daß sie Scheitelecken sind.

16.

Das Polareck.

Erklärung: Fällt man von irgend einem Punkte im Innern eines Eckes Senkrechte auf die Flächen des Eckes, so bilden die durch die Senkrechten gelegten Ebenen ein neues Eck, welches das Poleck oder Polareck oder Supplementareck genannt wird.

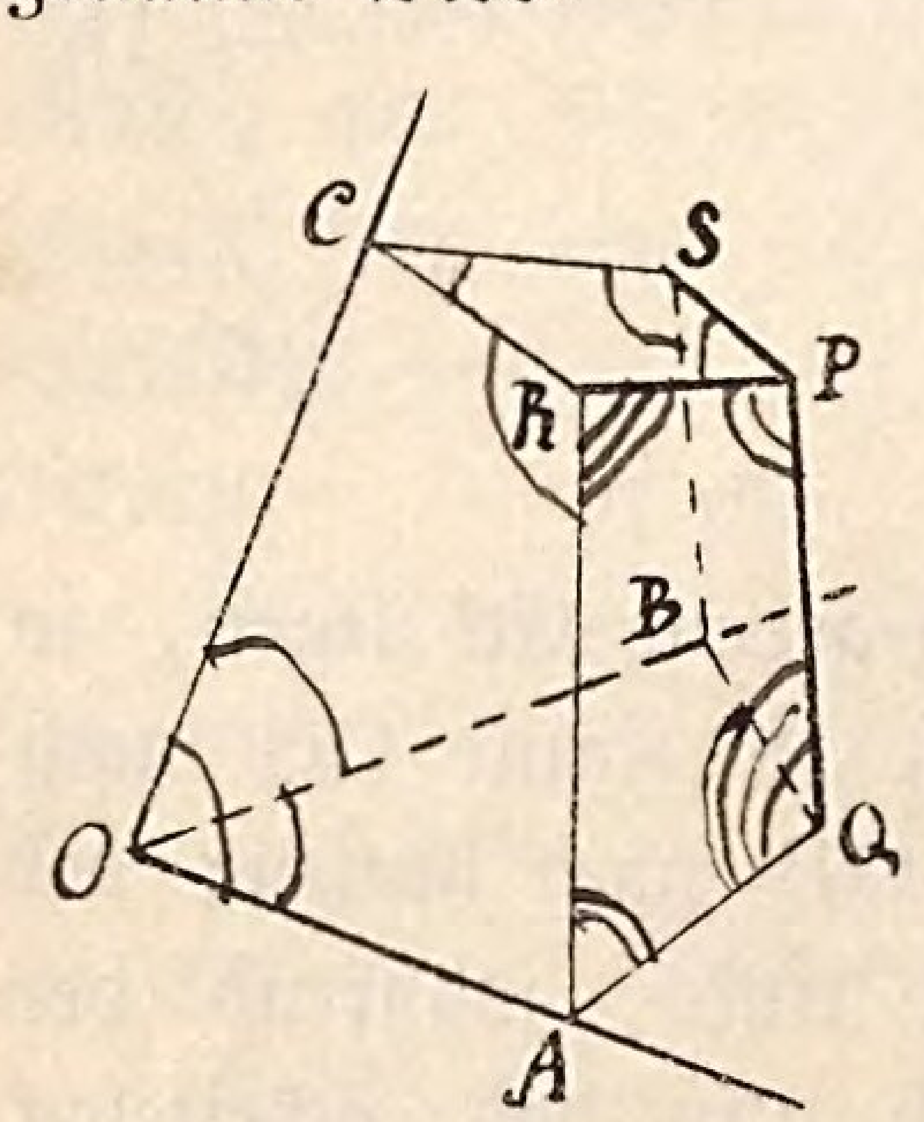


Fig. 17.

Lehrsätze: a) Ist P das Polareck von O, so ist auch O das Poleck von P. (Jedes Eck ist polar zu seinem Poleck.)

Der Satz setzt voraus, daß die Kanten des Eckes P, nämlich PQ, PR, PS senkrecht stehen auf den Flächen des Eckes O, nämlich auf BOA, AOC, COB, und behauptet, daß auch die Kanten des Eckes O, nämlich OA, OB,

OC senkrecht stehen auf den Ebenen des Eckes P nämlich auf PRAQ, PSBQ, PSCR.

Beweis: Eb. PRAQ enthält PQ $\perp$ Eb. BOA, ist also nach **11a** selbst $\perp$ Eb. BOA; zu dem enthält sie PR $\perp$ Eb. COA, ist also auch $\perp$ Eb. COA, folglich ist nach **11d** OA $\perp$ Eb. PRAQ. Analog für OB und OC.

b) Jeder Kantenwinkel des Eckes ist supplementär zum entsprechenden Flächenwinkel des Poleckes und jeder Flächenwinkel des Eckes ist supplementär zum entsprechenden Kantenwinkel des Poleckes, wobei unter entsprechendem Winkel derjenige verstanden wird, dessen begrenzende Elemente senkrecht stehen auf den begrenzenden Elementen des gegebenen Winkels.

Es ist also zu beweisen, daß:

1) $\sphericalangle$ BOA + Flw. (PQ) = 2 R, $\sphericalangle$ COA + Flw. (PR) = 2 R, $\sphericalangle$ COB = Flw. (PS) = 2 R; und

2) Flw. (OA) + $\sphericalangle$ RPQ = 2 R, Flw. (OB) + $\sphericalangle$ SPQ = 2 R, Flw. (OC) + $\sphericalangle$ SPR = 2 R.

Beweis ad 1. Da PQ $\perp$ Eb. AOB, so wird der Flächenwinkel an der Kante PQ gemessen durch $\sphericalangle$ BQA (10), d. h. Flw. (PQ) = $\sphericalangle$ BQA. Im Viereck OBQA ist nun $\sphericalangle$ OAQ = R (nach a und 11a) und $\sphericalangle$ OBQ = R (ebenso), also ist die Summe der beiden anderen Winkel = 2 R, d. h. $\sphericalangle$ BOA + $\sphericalangle$ BQA = 2 R, oder $\sphericalangle$ BOA + Flw. (PQ) = 2 R. Analog beweist man die anderen zwei Behauptungen. Nach Beachtung von a derselbe Beweis wie 13, Uebungssatz 3.

Beweis ad 2. Da OA $\perp$ Eb. (PRAQ) nach a, so wird der Flächenwinkel an der Kante OA gemessen durch $\sphericalangle$ RAQ, oder Flw. (OA) = $\sphericalangle$ RAQ. Im Viereck ARPQ ist nun $\sphericalangle$ PQA = R (nach 11a) und $\sphericalangle$ PRA = R (nach 11a), also ist auch $\sphericalangle$ RAQ + $\sphericalangle$ RPQ = 2 R oder Flw. (OA) + $\sphericalangle$ RPQ = 2 R. Analog für die anderen Behauptungen. Derselbe Beweis wie 13, Uebungssatz 3.

Zusatz. Dieselben Sätze gelten über das Poleck eines mehrkantigen Eckes.

17.

Lehrsatz. Im Dreikant ist jeder Kantenwinkel kleiner als die Summe der beiden anderen.

Der Satz braucht blos vom größten Kantenwinkel bewiesen zu werden.

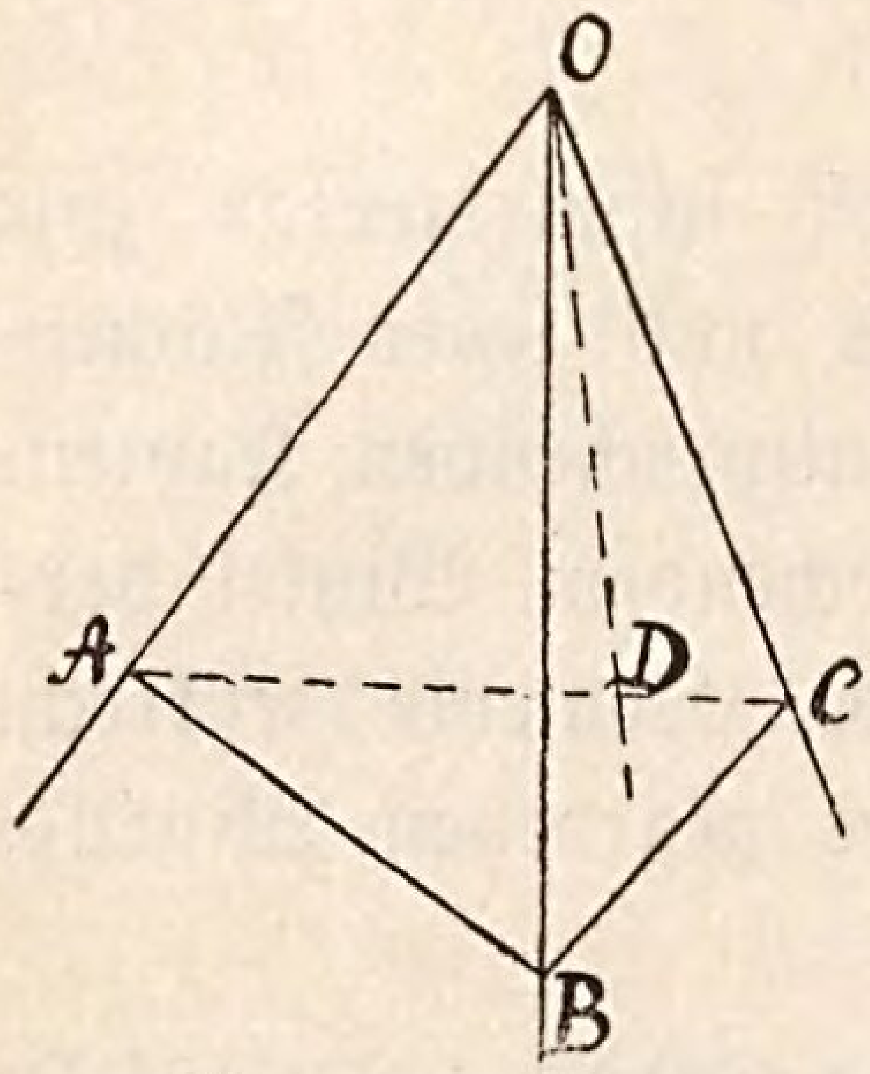


Fig. 18.

Beweis: Es sei $\sphericalangle AOC$ der größte, so soll bewiesen werden, daß $\sphericalangle AOC < \sphericalangle BOA + \sphericalangle BOC$. Man trage $\sphericalangle BOA$ auf der Ebene AOC von AO aus ab, so daß $\sphericalangle BOA = \sphericalangle AOD$, mache OD beliebig und gleich OB, und lege durch B,D und den beliebigen Punkt A von OA die Ebene DAB, welche OC in C schneidet. Nun ist: $\triangle BOA \cong \triangle AOD$, also $AD = AB$; da in $\triangle ACB$ die Seite $AC < AB + BC$, so folgt, daß $DC < BC$; da die zwei Dreiecke DOC und BOC zwei Seiten gleich (nämlich $OC = OC$, $OD = OB$) die dritten Seiten aber verschieden haben ($DC < BC$) so sind auch die gegenüberliegenden Winkel verschieden, also $DOC < BOC$; addirt man hiezu $\sphericalangle AOD = \sphericalangle AOB$, so folgt: $\sphericalangle AOC < \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC$.

18.

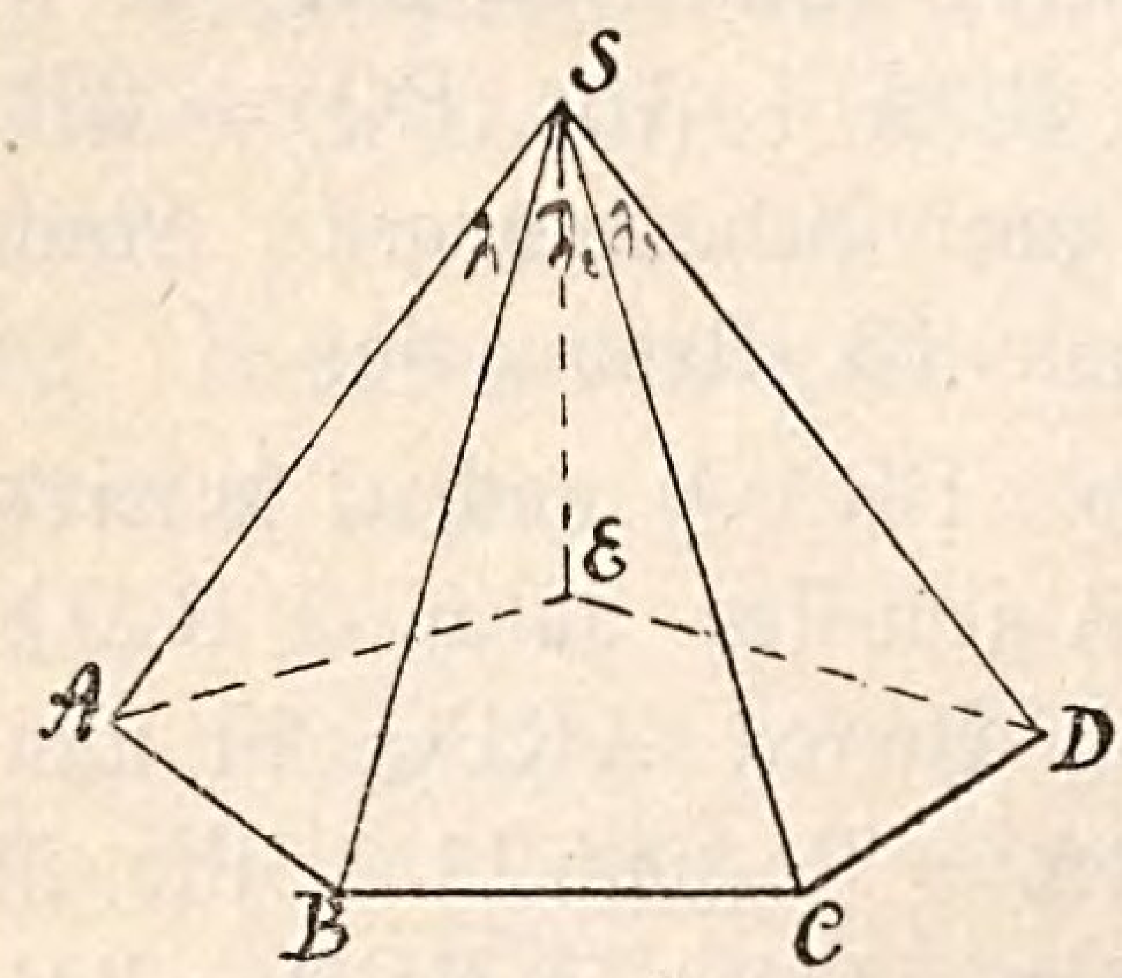


Fig. 19.

Lehrsätze. a) In jedem körperlichen Ecke ist die Summe der Kantenwinkel kleiner als 4 Rechte.

Beweis: Man lege eine beliebige Ebene, welche alle Kanten schneidet und demnach die Flächen in einem Vieleck ABCDE schneidet.

Bezeichnet man die Kantenwinkel des Eckes mit $ASB = \lambda_1$, $BSC = \lambda_2$, ꝛc., ihre Summe mit $\Sigma\lambda$, und die anderen Winkel der Dreiecke ASB, nämlich SAB mit μ_1, SBA mit μ_1^1 ꝛc. und ihre Summe mit $\Sigma\mu$, so ist in jedem solchen Dreieck ASB die Summe $\lambda_1 + \mu_1 + \mu_1' = 2R$. Demnach die Summe aller Winkel der n Dreieck, nämlich

$$\Sigma\lambda + \Sigma\mu = n.\, 2\, R.$$

An jedem Eck der Schnittfigur, etwa an B bilden aber die zwei anliegenden Dreiecke, nämlich ABS und CBS mit der Schnittebene ein Dreikant, in welchem nach **17** $\mu'_1 + \mu_2 > \omega_2$, wenn man die Winkel des Polygons ABCDE mit ω_1, ω_2, 2c., und ihre Summe mit $\Sigma\omega$ bezeichnet. Es ist deshalb $\Sigma\mu > \Sigma\omega$. Dies in die erste Gleichung eingesetzt gibt

$\Sigma\lambda + \Sigma\omega < n. 2 R$; aber $\Sigma\omega = n. 2 R - 4 R$, also

$\Sigma\lambda + n. 2 R - 4 R < n. 2 R$, woraus folgt

$\Sigma\lambda < 4 R$.

Zusatz 1. Im Dreikant ist jeder Kantenwinkel kleiner als 2 R.

Zusatz 2. In jedem Eck mit lauter ausspringenden Winkeln ist jeder Kantenwinkel kleiner als 2 R.

b) In jedem körperlichen Eck ist die Summe der Flächenwinkel $< n. 2 R$ und $> n. 2 R - 4 R$.

Beweis. Der erste Teil ergibt sich daraus, daß jeder einzelne Flächenwinkel $< 2 R$ ist.

Um den zweiten Teil zu beweisen, bezeichnen wir die Flächenwinkel des Eckes mit $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ u. s. w., ihre Summe mit $\Sigma\varkappa$, construieren zu diesem Eck das Polareck und bezeichnen dessen entsprechende Kantenwinkel mit λ_1, λ_2, λ_3 u. s. w., und ihre Summe mit $\Sigma\lambda$. Da nach **16 b** $\varkappa_1 + \lambda_1 = 2 R$, $\varkappa_2 + \lambda_2 = 2 R$ u. s. w., so ist

$\Sigma\lambda + \Sigma\varkappa = n. 2 R$ oder

$\Sigma\varkappa = n. 2 R - \Sigma\lambda$; da aber in jedem Ecke $\Sigma\lambda < 4 R$, so folgt $\Sigma\varkappa > n. 2 R - 4 R$.

Zusatz. Im Dreikant ist $\Sigma\lambda > 2 R$.

Congruenz der Dreikante.

19.

Die Größen der Kanten- und Flächenwinkel eines Dreikantes sind nicht von einander unabhängig. Es entsteht daher die Frage, wie viele von ihnen bestimmt sein müssen, damit dadurch auch die Größe der anderen bestimmt sei, oder, wie viele von ihnen bestimmt sein müssen, damit zwei Dreikante, welche so construirt sind, daß sie in den gegebenen Winkeln übereinstimmen, auch in den anderen nicht gegebenen Winkeln übereinstimmen.

Zwei Dreikante, welche in allen Stücken übereinstimmen, sind dann entweder congruent, d. h. sie können so gelegt werden, daß alle Flächen und Kanten zusammenfallen, oder sie sind symmetrisch, können also nach **15** als Scheitelecken, d. h. so gelegt werden, daß die Flächen und Kanten des einen die Rückwärtsverlängerungen der Flächen und Kanten des anderen Dreikants sind.

Im folgenden werden die 6 Congruenz- oder Symmetriesätze angeführt, deren Beweise jedoch nur angedeutet, wenn sie den bekannten Beweisen der Congruenzsätze der Planimetrie analog sind.

a) Congruenz-Sätze.

1. Congruenz-Fall; Zwei Dreikante sind congruent oder symmetrisch, wenn sie ein Kantenwinkelpaar und die zwei anliegenden Flächenwinkelpaare gleich haben.

Beweis durch Ineinanderlegen. Zeigt sich, daß die Ecke P_1 nicht mit der Ecke P_2 zur Deckung gebracht werden kann, so kann P_1 mit der Scheitelenke P_2' von P_2 zur Deckung gebracht werden; dann ist P_1 symmetrisch zu P_2.

2. Congruenz-Fall. Zwei Dreikante sind congruent oder symmetrisch, wenn sie ein Flächenwinkelpaar und die zwei anliegenden Kantenwinkelpaare gleich haben.

Beweis und Bemerkung wie bei 1.

3. Congruenz-Fall. Zwei Dreikante sind congruent oder symmetrisch, wenn sie die 3 Kantenwinkelpaare gleich haben.

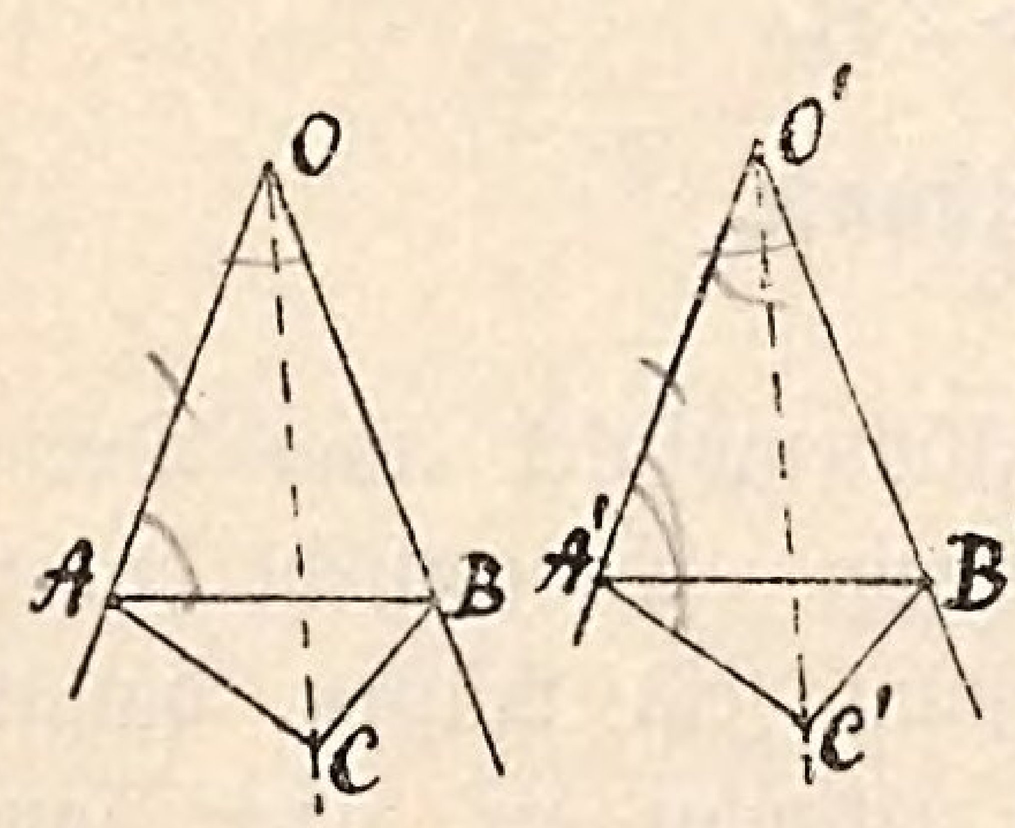


Fig. 20.

Beweis. Man führt den Beweis auf 2 zurück dadurch, daß man nachweist, daß ein Paar Flächenwinkel gleich sind. Zu diesem Zwecke macht man OA = O'A', und legt durch A eine Ebene $\perp$ AO, welche die Flächen des Dreikants O im Dreieck ABC durchschneidet, so ist $\sphericalangle$ BAC der Flächenwinkel an der Kante AO; ebenso legt man durch A' eine senkrechte Ebene und hat $\sphericalangle$ B'A'C' = Flw. (A'O'). Nun ergibt sich leicht $\triangle$ AOB $\cong$ $\triangle$ A'O'B', also OB = O'B', und

$\triangle AOC \cong \triangle A'O'C'$, also $OC = O'C'$; hieraus und aus $\sphericalangle COB \cong \sphericalangle C'O'B'$ ergibt sich $\triangle COB \cong \triangle C'O'B'$, also $CB = C'B'$; da zudem aus den obigen Congruenzen folgt:

$AB = A'B'$ und $AC = A'C'$, so ist schließlich

$\triangle CAB \cong \triangle C'A'B'$, also $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$, demnach Flw. $(AO) =$ Flw. $(A'O')$, wodurch der Beweis auf 2 zurückgeführt ist.

4. Congruenz-Fall. Zwei Dreikante sind congruent oder symmetrisch, wenn die 3 Flächenwinkelpaare gleich sind.

Beweis. Man bilde zu jedem Dreikant das Polareck, so sind in denselben nach **16 b** die Kantenwinkel einander gleich, folglich sind die Polarecken congruent oder symmetrisch, also sind auch deren Flächenwinkel einander gleich, hieraus schließt man aber mittels **16 b**, daß auch die Kantenwinkel der gegebenen Ecken gleich sind, hat also den Beweis auf einen der vorhergehenden Congruenzsätze zurückgeführt.

Diesen schließen sich einige Sätze über das Dreikant mit gleichen Kantenwinkeln an.

b) Sind in einem Dreikant zwei Kantenwinkel gleich, so sind auch die den gleichen Kantenwinkeln gegenüberliegenden Flächenwinkel gleich.

Beweis; Es sei $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOC$, so soll bewiesen werden, daß Flw. $BO =$ Flw. AO. Man halbiere $\sphericalangle AOB$ durch DO, lege Ebene COD, so ist nach dem 3. Congruenzsatze das Eck $OADC$ symmetrisch zum Eck $OBCD$, folglich Flw. $AO =$ Flw. OB.

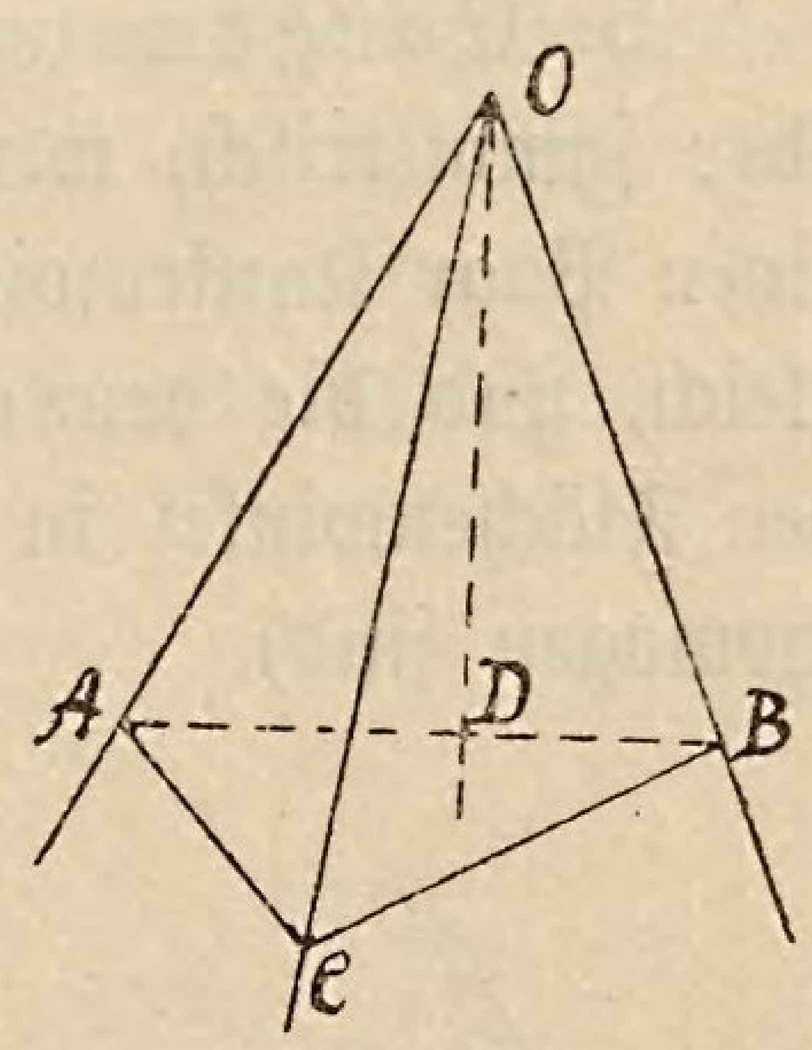


Fig. 21.

Zusatz: Sind in einem Dreikant die 3 Kantenwinkel gleich, so sind auch die 3 Flächenwinkel gleich.

c) Umkehrung: Sind in einem Dreikant zwei Flächenwinkel gleich, so sind auch die gegenüberliegenden Kantenwinkel gleich.

Beweis: Man konstruiere zum Dreikant die Polarecke, so hat diese nach **16** b zwei gleiche Kantenwinkel, folglich auch zwei gleiche Flächenwinkel, folglich sind nach **16** b auch die gegenüberliegenden Kantenwinkel des gegebenen Dreikantes einan-

der gleich und es ist leicht zu sehen, daß es diejenigen sind, welche den zwei gleichen Flächenwinkeln des Dreikants gegenüber liegen.

Zusatz. Sind in einem Dreikant die 3 Flächenwinkel gleich, so sind auch die drei Kantenwinkel gleich.

d) In jedem Dreikant liegt dem größeren Flächenwinkel auch der größere Kantenwinkel gegenüber.

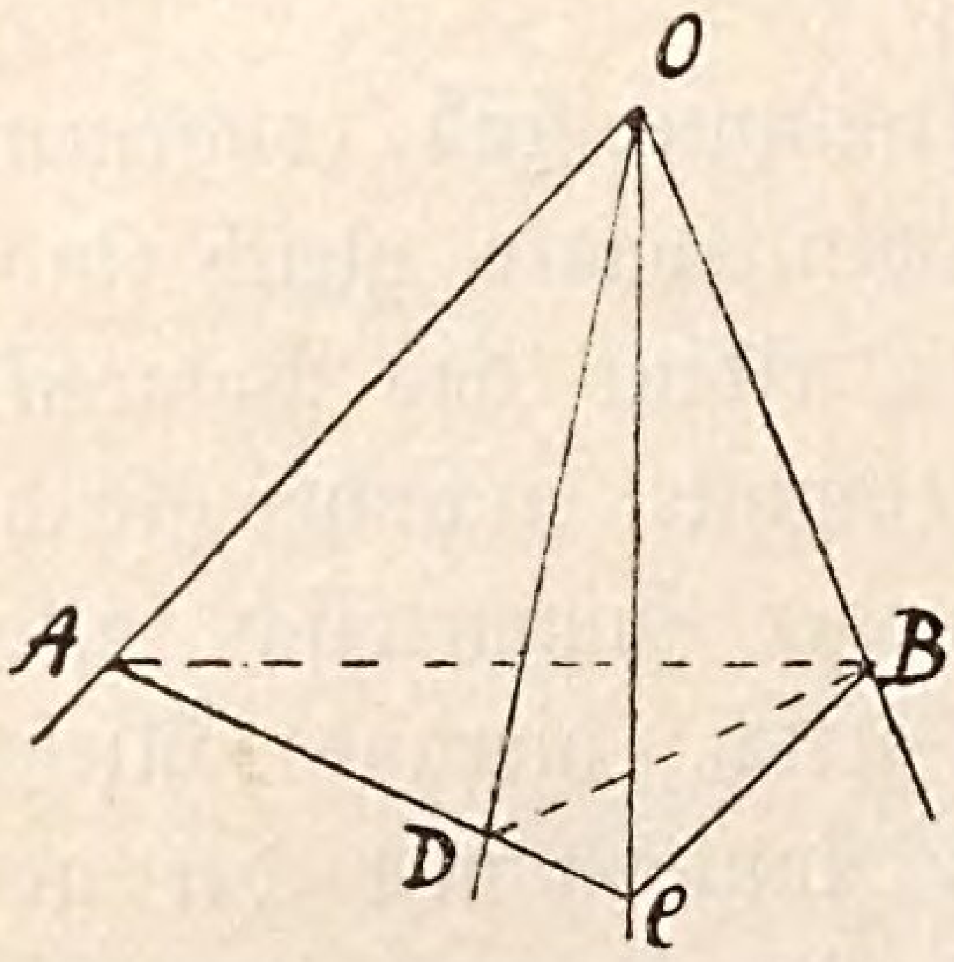


Fig. 22.

Beweis: Es sei Flw. AO $<$ Flw. OB, so ist zu beweisen, daß $\sphericalangle$ COB $< \sphericalangle$ AOC.

Man lege durch OB eine Eb. DBO, so daß sie mit der Eb. AOB einen Flächenwinkel bildet, welcher $=$ Flw. AO ist. Dann ist im Dreikant OADB nach c $\sphericalangle$ AOD $= \sphericalangle$ DOB; aber aus Dreikant ODBC ist nach **17** $\sphericalangle$ COB $< \sphericalangle$ DOB $+ \sphericalangle$ DOC, also durch Substitution $\sphericalangle$ COB $< \sphericalangle$ AOD $+ \sphericalangle$ DOC, oder $\sphericalangle$ COB $< \sphericalangle$ AOC.

e) In jedem Dreikant liegt dem größeren Kantenwinkel auch der größere Flächenwinkel gegenüber.

Beweis: analog c durch Bildung des Polarecks.

5. Congruenz-Fall. Zwei Dreikante sind congruent oder symmetrisch, wenn zwei Kantenwinkelpaare gleich, die dem einen Paar Kantenwinkel gegenüberliegenden Flächenwinkel auch gleich, und die dem andern Paar Kantenwinkel gegenüberliegenden Flächenwinkel in Summe größer oder kleiner als 2 R sind (homogen sind).

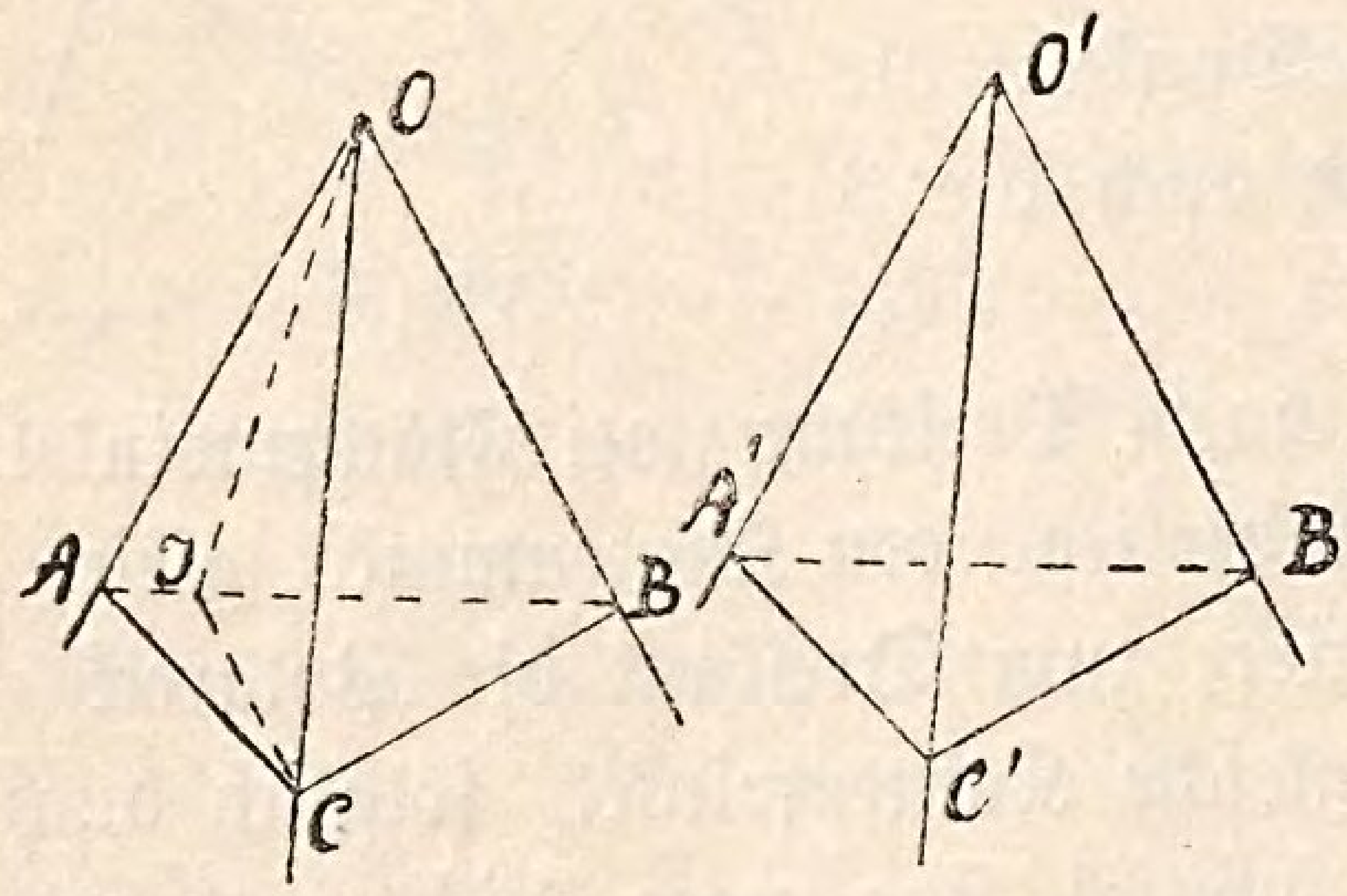


Fig. 23.

Beweis: (analog dem 4. Congruenzfall der Planimetrie). Es sei $\sphericalangle$ AOC $= \sphericalangle$ A'O'C', $\sphericalangle$ COB $= \sphericalangle$ C'O'B', Flw. (OB) $=$ Flw. (O'B'), Flw. (AO) $+$ Flw. (A'O') $\gtrless$ 2 R.

Man lege Eck O' so in Eck O, daß O' auf O, O'B'

nach OB, Eb. A′O′B′ in Eb. AOB fällt, so fällt Eb. C′O′B′ in Eb. COB, weil Flw. (O′B′) = Flw. (OB), und es fällt O′C′ nach OC, weil ∢ C′O′B′ = ∢ COB. Es wird nun behauptet, daß auch Eb. (C′O′A′) in Eb. (COA) fallen muß. Denn fielen sie nicht zusammen, so könnte Eb. C′O′A′ nur entweder diesseits oder jenseits Eb. COA fallen. Wir nehmen an, sie fiele diesseits, etwa nach OCI, so wäre im Dreikant OAIC, da ∢ AOC = ∢ IOC, nach b

Flw. COAI = Flw. COIA; es ist aber, da AOIB eine Ebene ist, Flw. AOIC + Flw. BOIC = 2 R, aber Flw. BOIC ist der Flw. B′O′A′C′, und Flw. AOIC = Flw. COAI, wie eben bewiesen; durch Substitution hätte man also:

Flw. COAI + Flw. B′O′A′C′ = 2 R, was gegen die Voraussetzung ist; es kann deshalb Eb. C′O′A′ nicht diesseits Eb. COA fallen.

Man beweist ebenso, daß Eb. C′O′A′ nicht jenseits Eb. COA fallen kann, und schließt, daß sie auf Eb. COA fallen muß, womit die Dreikante zur Deckung gebracht sind.

6. Congruenz-Fall: Zwei Dreikante sind congruent oder symmetrisch, wenn zwei Flächenwinkelpaare gleich, die dem einem Flächenwinkelpaare gegenüberliegenden Kantenwinkel gleich, und die dem andern Flächenwinkelpaare gegenüberliegenden Kantenwinkel in Summe größer oder kleiner als 2 R sind (homogen sind).

Beweis: Bildet man zu jedem Dreikant das Polareck, so sind die Polarecke nach 5 congruent.

Zweiter Teil.

Lehre von den Körpern.

I. Abschnitt.

Ebenflächige Körper.

20.

Vorbemerkung.

Ein allseitig begrenzter Raum heißt Körper. Wird ein Körper von lauter ebenen Flächenstücken begrenzt, so heißt er ein ebenflächiger Körper oder Polyeder.

Die begrenzenden Flächenstücke heißen Seitenflächen, die Strecken, in welchen sich zwei benachbarte Seitenflächen schneiden, heißen die Kanten, die Schnittpunkte benachbarter Kanten heißen Ecken. Die Winkel zwischen benachbarten Kanten heißen Kantenwinkel. Die Winkel zwischen benachbarten Seitenflächen heißen Flächenwinkel. Wie beim körperlichen Eck, machen wir auch hier die Beschränkung, daß wir nur solche Körper betrachten, bei welchen jeder dem Innenraum des Körpers zugewendete Flächenwinkel kleiner als 2 R ist. Solche Körper heißen Euler'sche Polyeder; bei ihnen ist jeder Kantenwinkel kleiner als 2 R, und jedes Eck hat nur ausspringende Winkel, weshalb man sie auch Polyeder mit ausspringenden Ecken nennt.

Die Polyeder, bei welchen ein oder mehrere Flächenwinkel einspringend sind, haben Ecken, welche teilweise oder ganz einspringend sind. Jede Ebene, welche eine Kante mit einspringendem Winkel schneidet, schneidet das Polyeder in einem Polygon mit einspringenden Winkeln, so daß es Gerade gibt, von denen

mehr als eine Strecke im Innern des Polyeders liegt, welche also das Polyeder in mehr als zwei Punkten schneiden.

Ein Euler'sches Polyeder wird von einer Ebene stets in einem Polygon mit nur ausspringenden Winkeln und von einer Geraden nur in zwei Punkten geschnitten.

Als die einfachsten Arten der Euler'schen Polyeder gelten das Prisma und die Pyramide.

21.
Prisma.

Erklärung. Ein Raum, welcher von Ebenen begrenzt wird, deren Schnittlinien sämmtlich parallel sind, heißt ein prismatischer Raum. Der prismatische Raum erstreckt sich in der den Schnittlinien parallelen Richtung beiderseits ins Unbegrenzte.

Die Seitenflächen des prismatischen Raumes sind alle parallel zu irgend einer den Schnittlinien oder Kanten parallelen Geraden.

Wir betrachten nur solche prismatische Räume, deren Flächenwinkel alle ausspringend sind.

Schneidet man einen prismatischen Raum durch zwei parallele Ebenen, so wird der zwischen den parallelen Grenzflächen liegende Teil des prismatischen Raumes ein prismatischer Körper, Prisma, genannt. Die parallelen Grenzflächen heißen Gegenflächen (Grund- und Deckfläche), ihre Kanten die Grund- (und Deck-)kanten; die aus den Grenzflächen des prismatischen Raumes durch die Gegenflächen ausgeschnittenen Flächen heißen die Seitenflächen, die Schnittlinien zweier benachbarten Seitenflächen heißen die Seitenkanten des Prismas.

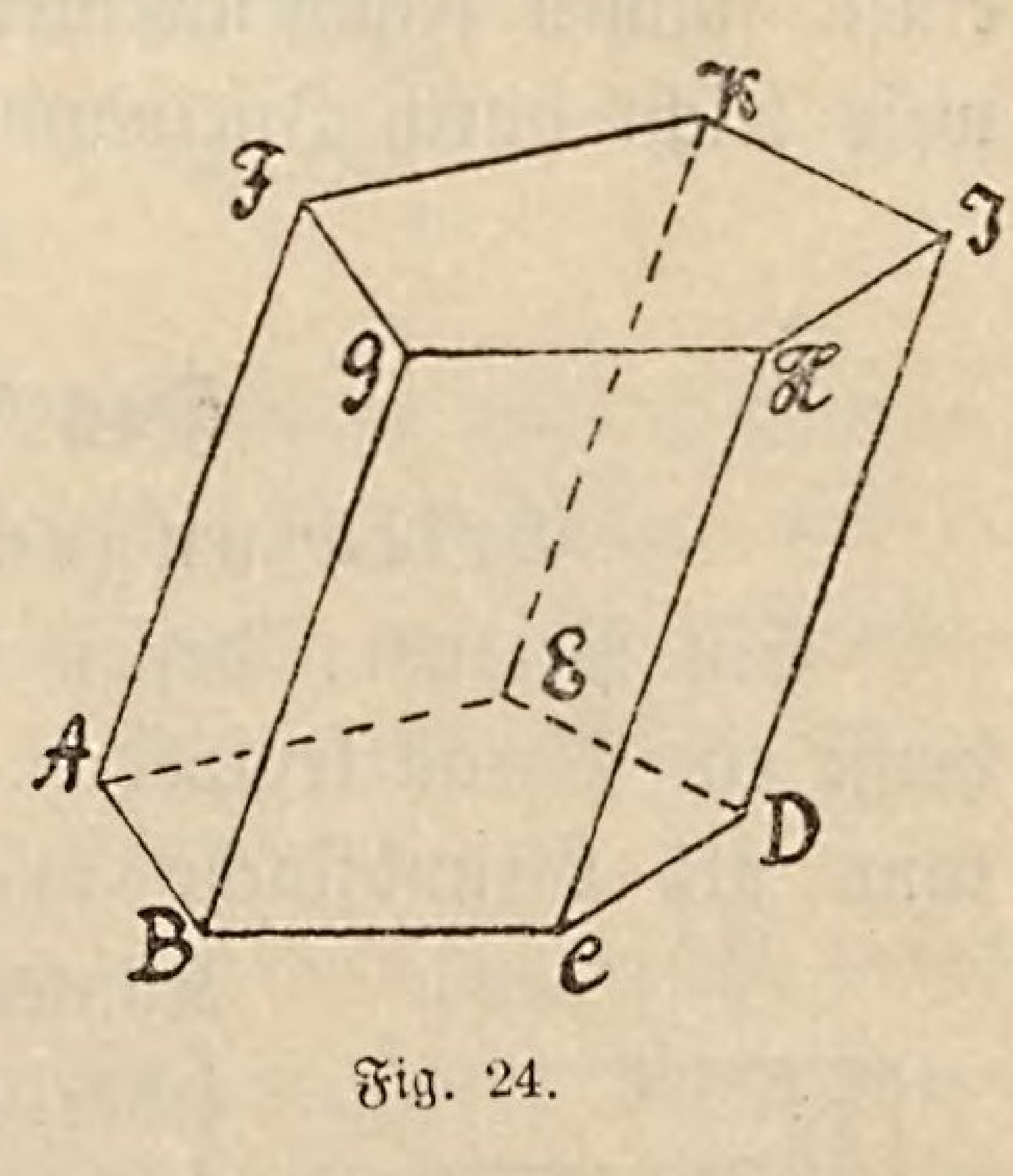


Fig. 24.

Ein Prisma heißt ein senkrechtes oder gerades, wenn die Seitenkanten, also auch die Seitenflächen senkrecht stehen auf der Grundfläche, sonst ein schiefes.

Lehrsätze: a) Die Seitenkanten sind gleich lang (13 c. b) Die Seitenflächen sind Parallelogramme und beim senkrechten Prisma Rechtecke. c) Die Gegenflächen sind congruent. Beweis leicht.

Zusätze: Jede einer Gegenfläche parallele Ebene schneidet das Prisma in einer mit den Gegenflächen congruenten Figur.

Zwei beliebige parallele Ebenen, welche nur die Seitenflächen schneiden, schneiden das Prisma in congruenten Figuren.

Jede einer Seitenkante parallele oder durch eine Seitenkante gehende Ebene schneidet das Prisma in einem Parallelogramm und das senkrechte Prisma in einem Rechteck und teilt es in zwei Prismen.

d) Zwei Prismen sind congruent, wenn die Grundflächen congruent, die Seitenkanten gleich und zwei an gleichliegenden Ecken der Grundflächen liegende körperliche Ecke congruent sind. (Die letzte Bedingung erfordert, da die zugehörigen Winkel der Grundflächen schon als gleich vorausgesetzt sind, nur noch zwei weitere Gleichheiten von Winkeln, etwa der zwei Flächenwinkel, welche die zwei Seitenflächen mit den Grundflächen bilden, oder einen solchen Flächenwinkel und einen Kantenwinkel etc.) Beweis leicht durch Ineinanderlegen.

22.

Das Parallelepiped.

Erklärungen und Eigenschaften.

Ein Prisma, dessen Gegenflächen Parallelogramme sind, heißt ein Parallelepipedon. Jede Fläche des Parallelepipedes kann als Grundfläche angesehen werden. Je vier parallele Kanten desselben sind einander gleich. In jeder Ecke stoßen je 3 im allgemeinen verschiedene Kanten zusammen. Ein Parallelepiped heißt senkrecht oder gerade, wenn die Seitenkanten auf der Grundfläche senkrecht stehen; seine Seitenflächen sind demnach Rechtecke. Ein senkrechtes Parallelepiped, dessen Gegenflächen Rechtecke sind, heißt ein rechtwinkeliges; bei ihm sind alle Flächen Rechtecke. Ein rechtwinkeliges

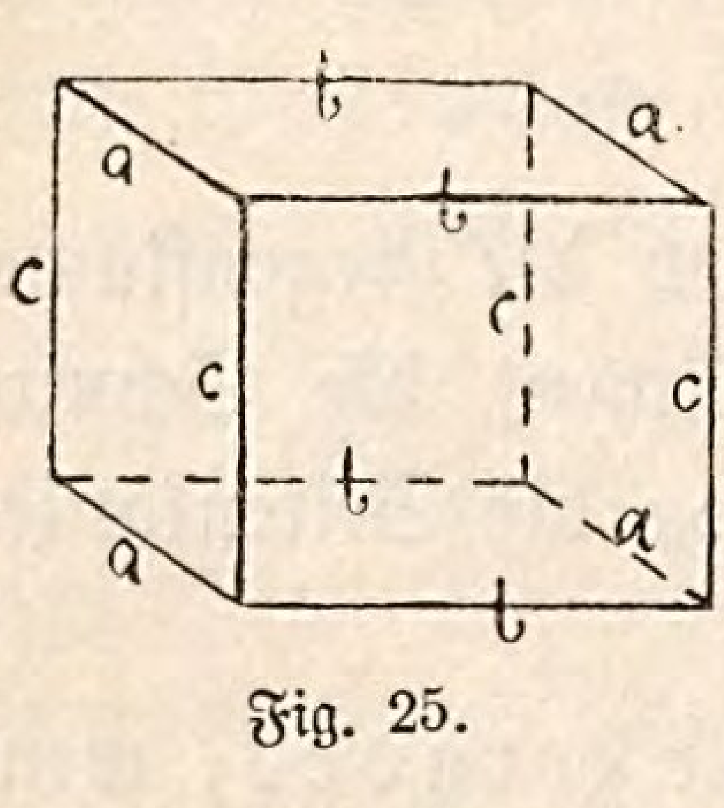


Fig. 25.

Parallelepiped ist bestimmt durch die Länge von drei in einem Ecke zusammenstoßenden Kanten. Ein rechtwinkeliges Parallelepiped von lauter gleichen Kanten heißt Würfel, Kubus oder Hexaeder, seine Grenzflächen sind gleiche Quadrate.

Der senkrechte Abstand zweier Gegenflächen heißt die Höhe des Parallelepipeds.

23.
Gleichheit der Parallelepipede.

Lehrsatz: Zwei Parallelepipeda haben gleiches Volumen oder sind inhaltsgleich, wenn sie congruente Grundflächen und gleiche Höhen haben.

Beweis: Man legt die Parallelepipede so in einander, daß die congruenten Grundflächen sich decken und unterscheidet dann die zwei Fälle, daß

a) zwei Seitenflächen in eine Ebene fallen,

b) daß dies nicht stattfindet.

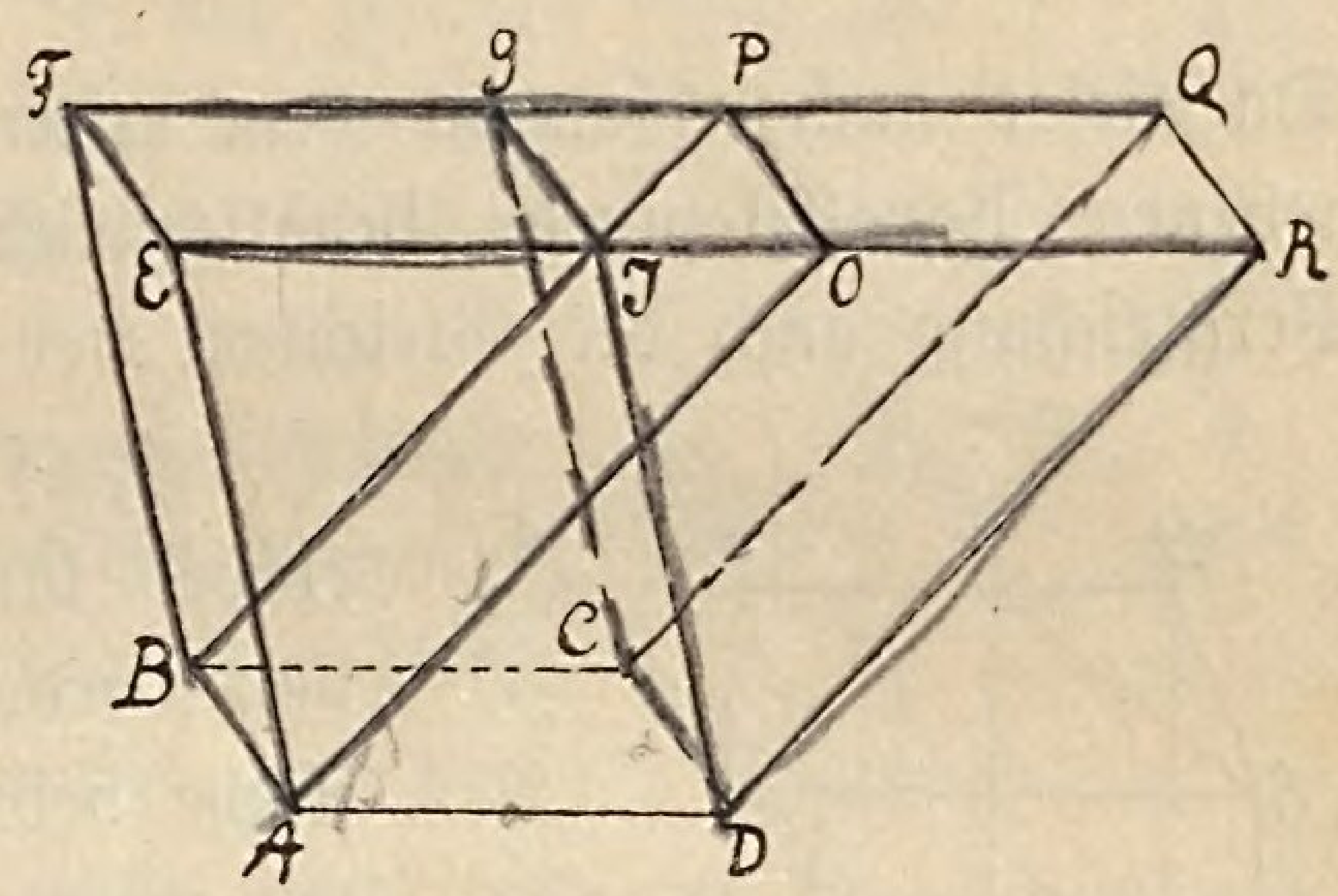


Fig. 26.

ad. a) Es liegen die beiden Parallelepipede mit der Grundfläche ABCD auf einander, so fallen die Gegenflächen EFGI und OPQR in eine Ebene. Liegen nun die Seitenflächen AEID und AORD in einer Ebene, so liegen auch deren Gegenflächen BFGC und BPQC in einer Ebene.

Man beweist nun die Congruenz der dreiseitigen Prismen AEOBFP und DIRCGQ etwa aus der Congruenz der Grundflächen AEO und DIR, der Gleichheit der Flächenwinkel an den Kanten AE und DI, AO und DR und der Gleichheit der Seitenkanten AB und CD (21 d). Durch Subtraktion dieser Prismen von dem Körper ABCDEFQR ergibt sich die Gleichheit der Parallelepipede.

b) Sind die Parallelepipede mit den Grundflächen zur Deckung gebracht und fällt kein paar Seitenflächen in eine

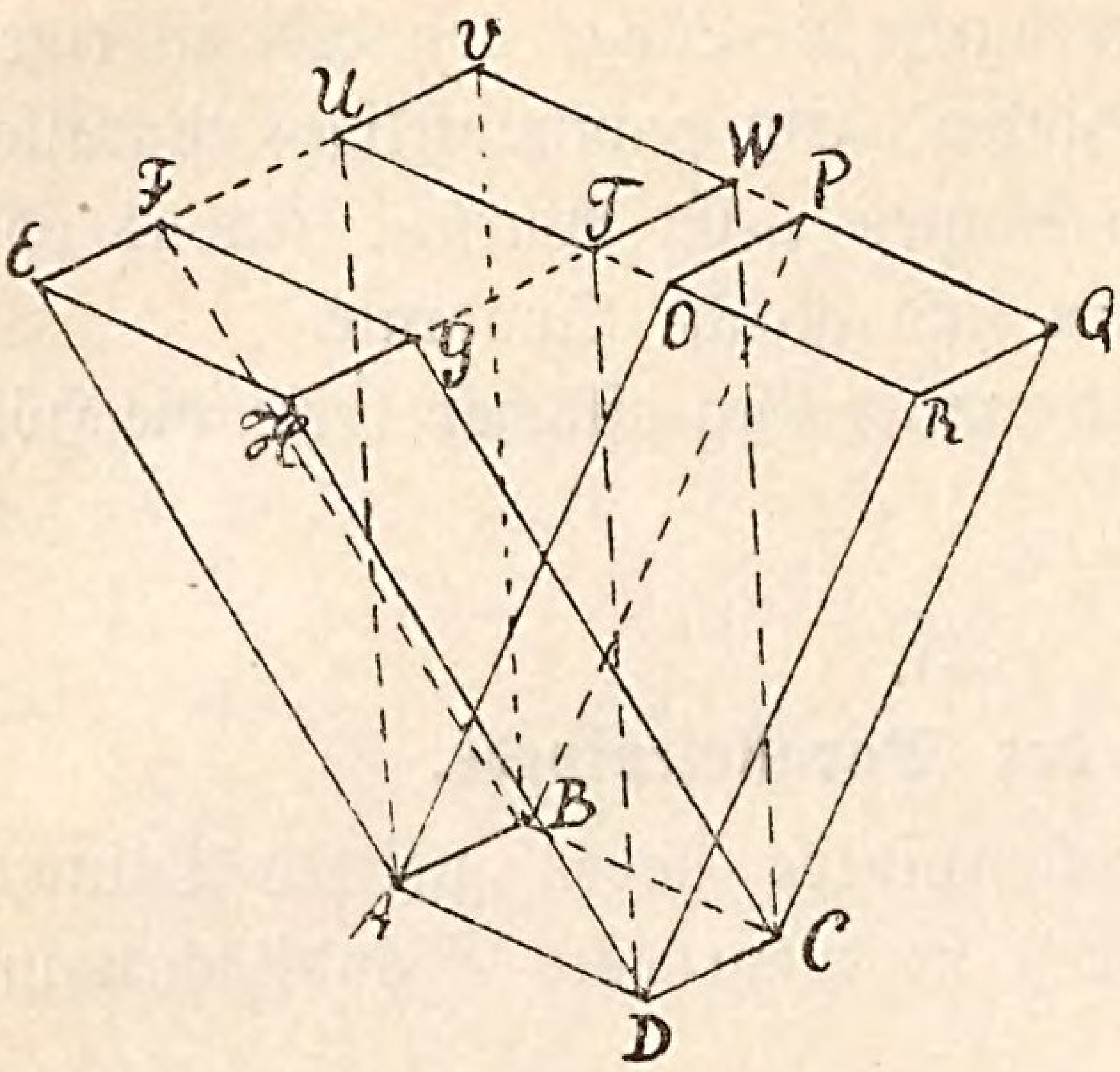


Fig. 27.

Ebene, so fallen doch die Deckflächen EFGH und OPQR in eine Ebene. Erweitert man nun am ersten Parallelepiped die Ebenen ABFE und DCGH und vom zweiten die Ebenen AORD und BPQC, so bestimmen sie mit der gemeinschaftlichen Ebene der beiden Deckflächen ein neues Parallelepiped ABCDUVWT. Da dieses nach a sowohl dem ersten als dem zweiten der gegebenen Parallelepipede inhaltsgleich ist, so ergibt sich durch Vergleichung auch die Gleichheit der letzteren.

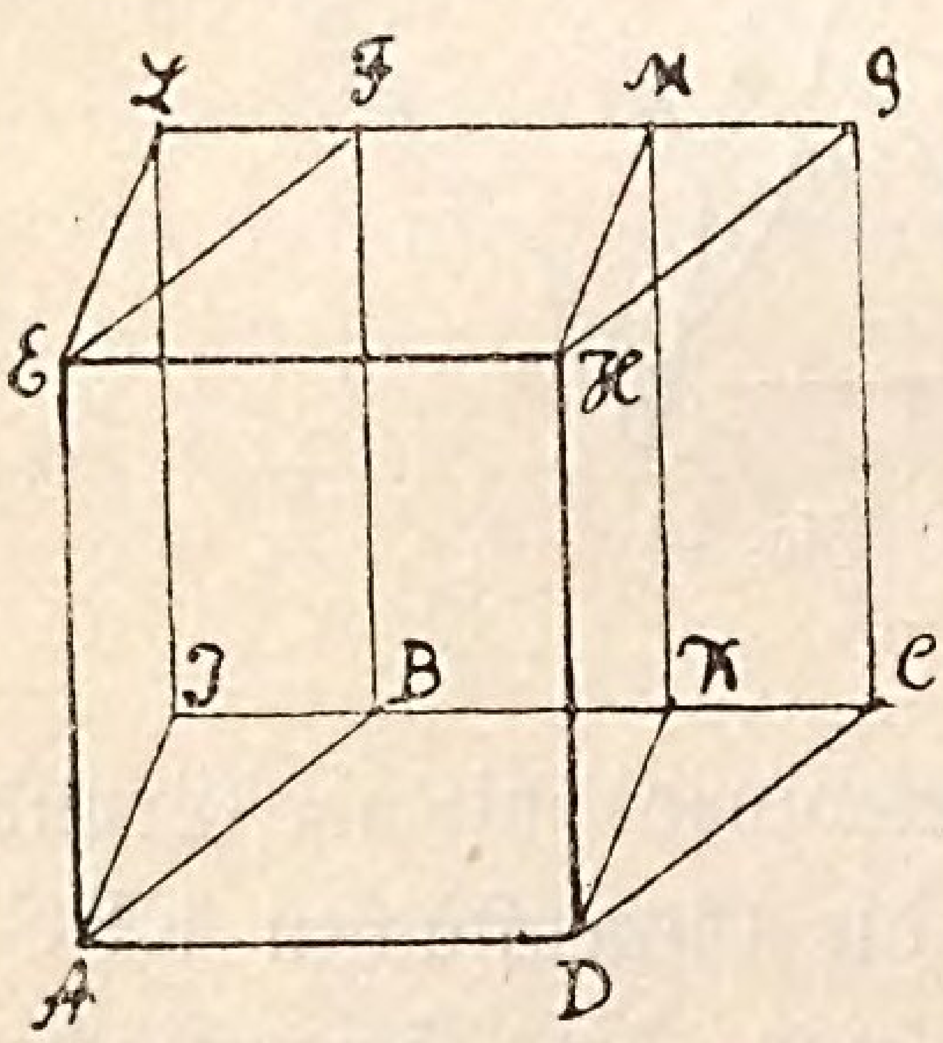


Fig. 28.

Zusatz: Jedes schiefe Parallelepiped kann in ein gerades verwandelt werden, indem man die Grundfläche beibehält, Seitenflächen errichtet, welche auf der Grundfläche senkrecht stehen und die Deckfläche in gleicher Höhe anbringt.

c) Jedes schiefe Parallelepiped kann in ein rechtwinkeliges verwandelt werden, dessen rechteckige Grundfläche mit der Grundfläche des gegebenen gleiche Grundlinie und Höhe, und welches mit dem gegebenen gleiche Höhe hat.

Man verwandelt das schiefe Parallelepiped nach Zus. 1 in ein gerades ABCDEFGH, (Fig. 28) verwandle dessen Grundfläche ABCD in das inhaltsgleiche Rechteck AIKD und errichte über demselben das gerade Parallelepiped AIKDELMH; dieses ist dann gleich dem gegebenen ABCDEFGH nach a, denn sie haben dieselbe Grundfläche AEHD und die Deckflächen BFGC und ILMK liegen in einer Ebene.

24.

Gleichheit der Prismen.

Lehrsätze: a. Jedes schiefe dreiseitige Prisma ist gleich dem geraden dreiseitigen Prisma, das den zu den Seitenkanten senkrechten Querschnitt des prismatischen Raumes als Grundfläche und die Seitenkante als Höhe hat.

Beweis: Es sei ABCDEF das schiefe Prisma, so lege man durch die Endpunkte einer Seitenkante AD zwei Ebenen senkrecht zu den Seitenkanten, suche die Schnitte derselben mit den (erweiterten) Prismenflächen und erhält so das gerade Prisma AIKDLM, von welchem zu beweisen ist, daß es dem schiefen Prisma gleich ist.

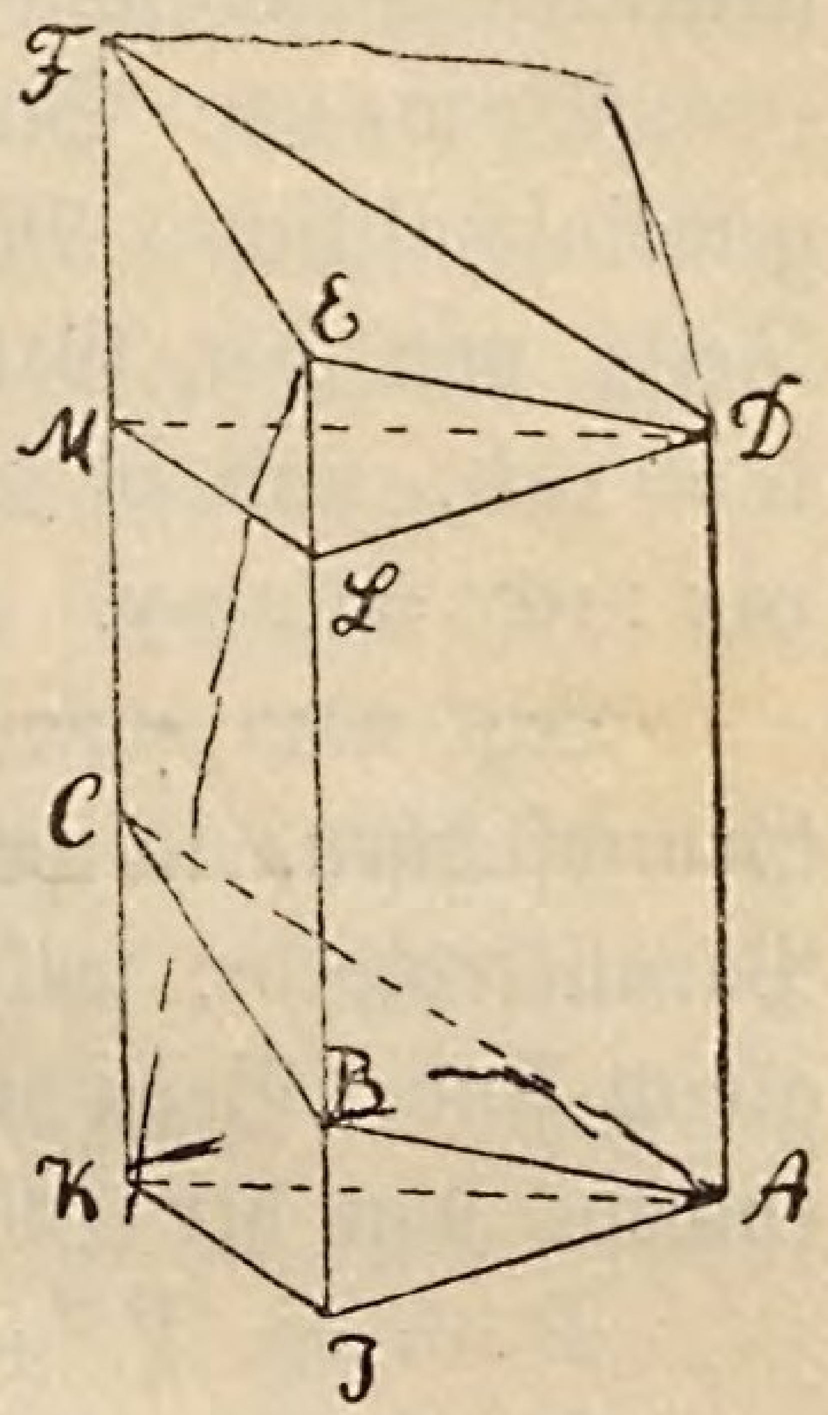


Fig. 29.

Man beweist die Congruenz der Körper AIBCK und DLEFM, durch Ineinanderlegen, was mittels △ AIK ≅ △ DLM (21) der gleichen Flächenwinkel an den Seiten dieser Dreiecke (12 a und 13 d) und aus IB = LE und KC = MF leicht bewiesen wird; dann erhält man durch Subtraktion je eines dieser Körper vom Körper AIKDEF die Gleichheit der Prismen.

b. Jedes schiefe Prisma ist gleich dem geraden Prisma, welches den zu den Seitenkanten senkrechten Querschnitt des prismatischen Raumes als Grundfläche und die Seitenkante als Höhe hat.

Beweis: Entweder analog a oder durch Zerschneiden des nseitigen Prismas in (n—2) dreiseitige Prismen und Anwendung von a.

c. Jedes gerade Parallelepiped wird durch eine durch zwei Seitenkanten gelegte Diagonalebene in zwei congruente dreiseitige Prismen zerlegt. Beweis durch Ineinanderlegen.

d. Jedes schiefe Parallelepiped wird durch eine Diagonalebene, welche zwei beliebige gegenüberliegende Kanten enthält, in zwei gleiche dreiseitige Prismen zerlegt.

Beweis mittels b, c, a.

Zusatz: Jedes dreiseitige Prisma kann zu einem Parallelepiped von doppeltem Inhalt ergänzt werden; mittels d.

25.

Verhältnis der Parallelepipede.

Lehrsätze: a. Zwei rechtwinkelige Parallelepipede von congruenten Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen.

Beweis: Sind die Höhen commensurabel, und m ein gemeinschaftliches Maß derselben, so teile man jede Höhe in Teile von der Größe m; enthält h x solche Teile, so daß $h = mx$, und h' deren y, so daß $h' = my$, so ist $h : h' = mx : my = x : y$.

Legt man nun durch die Teilpunkte Ebenen parallel den Grundflächen, so zerfällt jedes Parallelepiped in rechtwinkelige Parallelepipede, welche nach 21 c Zus. und 23 a alle einander gleich sind. Bezeichnet man den Inhalt eines solchen Parallelepipeds von der Höhe m mit p, so ist

$$P = xp, \; P' = yp, \text{ also } P : P' = xp : yp = x : y;$$

Durch Vergleichung mit der ersten Proportion ergibt sich $P : P' = h : h'$.

Sind die Höhen incommensurabel, so wird der Beweis ebenso vervollständigt, wie man sonst vom Commensurablen auf das Incommensurable schließt.

Zusatz. Aus den Sätzen von 23 und 24 folgt die Gültigkeit dieses Satzes auch für zwei schiefe Parallelepipede, zwei gerade oder schiefe drei- oder mehrseitige Prismen, wenn jedesmal congruente Grundflächen vorausgesetzt werden.

b. Zwei rechtwinkelige Parallelepipede von derselben Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Beweis. Hat das Parallelepiped P_1 die Grundkanten a_1 und b_1, ebenso P_2 die Grundkanten a_2 und b_2, und haben beide dieselbe Höhe c, so mache man sich ein rechtwinkeliges Hülfsparallelepiped P mit den Grundkanten a_1 und b_2 und der Höhe c. Nach a hat man dann:

$$P_1 : P = b_1 : b_2 \text{ und}$$

$$P : P_2 = a_1 : a_2, \text{ also durch Multiplikation}$$

$P_1 : P_2 = a_1 b_1 : a_2 b_2$; da aber die Produkte der Grundkanten sich wie die Grundflächen G_1 und G_2 verhalten, so hat man:

$$P_1 : P_2 = G_1 : G_2.$$

Zusatz 1: Aus den Sätzen von 23 und 24 folgt die Gültigkeit dieses Satzes zunächst für zwei schiefe Parallelepipede von rechtwinkeligen Grundflächen, dann für zwei Parallelepipede, deren Grundflächen Parallelogramme sind, dann für zwei dreiseitige Prismen, dann für beliebige Prismen, wenn in jedem Falle die Höhen als gleich vorausgesetzt sind.

Zusatz 2: Prismen von gleichen Höhen sind gleich (haben denselben Inhalt), wenn ihre Grundflächen einander gleich sind.

c. Zwei rechtwinkelige Parallelepipede verhalten sich wie die Produkte aus Grundflächen und Höhen.

Beweis: Es haben die Parallelepipede P_1 und P_2 die Grundflächen G_1 und G_2 und die Höhen c_1 und c_2, so mache man ein rechtwinkeliges Hülfsparallelepiped P aus der Grundfläche $= G_1$ und der Höhe $= c_2$, so hat man nach a und b:

$$P_1 : P = c_1 : c_2 \text{ und}$$
$$P : P_2 = G_1 : G_2, \text{ also durch Multiplikation}$$
$$P_1 : P_2 = G_1 c_1 : G_2 c_2$$

Zusatz 1: Ersetzt man hierin $G_1 : G_2$ durch $a_1 b_1 : a_2 b_2$, so hat man $P_1 : P_2 = a_1 b_1 c_1 : a_2 b_2 c_2$, d. h. rechtwinkelige Parallelepipede verhalten sich wie die Produkte der sie bestimmenden Kanten (22).

Zusatz 2. Aus den Sätzen von 23 und 24 folgt die Gültigkeit des Lehrsatzes für beliebige Parallelepipede, dann für dreiseitige, dann für beliebige Prismen.

Zusatz 3. Zwei rechtwinkelige Parallelepipede sind gleich (haben gleichen Inhalt), wenn die Produkte der sie bestimmenden Kanten einander gleich sind.

Zusatz 4. Zwei Prismen sind gleich, wenn die Produkte aus Grundflächen und Höhen einander gleich sind, oder wenn ihre Grundflächen sich verhalten umgekehrt wie ihre Höhen.

Anmerkung. Die in diesem Kapitel vorkommenden Größen a, b, c, h ꝛc. bezeichnen Längen, G und G' bezeichnen Flächen;

sobald sie aber in ein Verhältnis eintreten, können sie auch durch ihre Maßzahlen ersetzt werden, entweder genau, wenn sie commensurabel, oder mit Vernachlässigung eines beliebig klein zu machenden Fehlers, wenn sie incommensurabel sind. Dann das Verhältnis etwa von a : a′ ist eine Zahl, welche angibt, wie vielmal a größer ist als a′, und diese Zahl kann nur dadurch gefunden werden, daß man a und a′ mit einer beliebigen aber gemeinschaftlichen Maßeinheit mißt, und das Verhältnis dieser Maßzahlen sucht. Es ist also erlaubt, in Lehrsatz a sich unter h und h′ deren Maßzahlen vorzustellen, welche, da sie gleichartig benannt sind, auch als unbenannt angesehen werden können. Dann ist es in b erlaubt, die Proportionen zu multiplizieren und die Produkte $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ zu bilden, wobei unter den a und b die je gleichbenannten und deshalb unbenannten Maßzahlen dieser Größen zu verstehen sind. Dasselbe gilt dann für die folgenden Sätze.

Es können hiebei verschiedene Maßeinheiten verwendet werden, wenn nur entsprechende Größen mit gleichem Maße gemessen werden; so kann man etwa in c Zusatz 1 die Größen a_1 und a_2 mit dem Maße m (Meter), die Größen b_1 und b_2 mit dem Maße m′ (Centimeter) und die Größen c_1 und c_2 mit dem Maße m″ (etwa Millimeter) messen, und wird, wenn man unter a_1, b_1, c_1 2c. die erhaltenen Maßzahlen versteht, die richtige Proportion bilden $P_1 : P_2 = a_1 b_1 c_1 : a_2 b_2 c_2$. In Lehrsatz c ist es ja sogar notwendig, die Größen G und c mit verschiedenen Maßeinheiten zu messen.

26.

Maß der Prismen.

Als Maßeinheit für das Volumen benützt man einen Würfel, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist. Z. B. Nimmt man als Längeneinheit ein Meter, so ist als Volumeneinheit ein Kubikmeter zu nehmen, das ist ein Würfel, dessen Kante einen Meter lang ist.

Das Volumen eines prismatischen Körpers ergibt sich nun aus den Lehrsätzen 25.

Vergleicht man das Volumen eines rechtwinkeligen Parallelepipedes P von den Kanten a, b, c mit dem Volumen eines Würfels W von den Kanten m, so hat man nach 25 c Zus. 1:

$$P : W = a\,b\,c : m \,.\, m \,.\, m, \text{ und bildet hieraus}$$

$$P = \left(\frac{a}{m} \,.\, \frac{b}{m} \,.\, \frac{c}{m}\right) . W.$$

Bedeutet nun m die Längeneinheit, also W die Volumeneinheit, so bedeuten $\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m}$ die Maßzahlen der bestimmenden Kanten des Parallepipedes gemessen durch die Längeneinheit und der Satz sagt aus:

Die Maßzahl eines rechtwinkeligen Parallelepipeds ausgedrückt durch Volumeinheiten (W) ist das Produkt der Maßzahlen der bestimmenden Kanten ausgedrückt durch Längeneinheiten. Oder: Das Volumen eines rechtwinkeligen Parallelepipedes ist gleich dem Produkt der sie bestimmenden Kanten. Indem man m und W als Einheiten durch 1 bezeichnet, schreibt man abkürzend $P = a \,.\, b \,.\, c$.

Analog findet man aus 25 c und 25 c Zusatz 2: Das Volumen eines Prismas ist gleich dem Produkt aus Grundfläche mal Höhe. $Pr = G \,.\, h$.

27.
Ähnlichkeit der Prismen.

Erklärung: Zwei Körper heißen ähnlich, wenn sie dieselbe Form oder Gestalt haben. Hiezu ist notwendig und hinreichend, daß:

1) jedem körperlichen Eck des einen Körpers ein congruentes körperliches Eck des andern entspreche,

2) daß entsprechende Kanten auch entsprechende Ecken verbinden,

3) die Kanten des einen Körpers zu den entsprechenden Kanten des anderen in constantem Verhältnisse stehen.

Lehrsätze: a. Zwei Prismen sind ähnlich, wenn ihre Grundflächen ähnliche Figuren und ein paar gleichliegende körperliche Ecken congruent sind, und die Seitenkanten in demselben Verhältnisse stehen wie ein Paar homologe Grundkanten.

Zum Beweise lege man die Prismen so in einander, daß die als congruent bekannten körperlichen Ecken sich decken, zeige, daß die anderen Seitenflächen entsprechend paarweise parallel sind (13 d. Umk.) leite daraus die Congruenz der anderen körperlichen Ecken ab und füge die Proportionalität der Seiten bei, was sich dann leicht als genügend ergibt.

b. In zwei ähnlichen Prismen verhalten sich die Höhen wie ein paar Seitenkanten oder wie ein paar homologe Grundkanten.

Zum Beweise lege man die Prismen wie in a, ziehe die Höhen von zwei entsprechenden Ecken aus, so liegen sie mit einer Seitenkante in einer Ebene und sind parallel, dann leicht.

c. Zwei rechtwinkelige Parallelepipede sind ähnlich, wenn die drei bestimmenden Kanten in einem Parallelepiped sich verhalten wie im anderen.

Beweis folgt unmittelbar aus a.

28.

Lehrsätze: a. Die Inhalte ähnlicher Prismen verhalten sich wie die dritten Potenzen oder Kuben homologer Kanten oder Höhen.

Beweis: Analog früheren Bezeichnungen hat man aus 25 c Zus. 2:

$P_1 : P_2 = G_1 h_1 : G_2 . h_2$; da aber nach 27 a

$G_1 : G_2 = a_1^2 : a_2^2$ und nach 27 b

$h_1 : h_2 = a_1 : a_2$, so folgt durch Multiplikation

$P_1 : P_2 = a_1^3 : a_2^3$ oder mittels 27 b

$P_1 : P_2 = h_1^3 : h_2^3$.

Umkehrung: Homologe Kanten oder Höhen ähnlicher Prismen verhalten sich wie die dritten Wurzeln aus den Inhalten.

b. Die Oberflächen ähnlicher Prismen verhalten sich wie die Quadrate homologer Kanten.

Beweis: Da entsprechende Flächen ähnliche Figuren sind, sich also verhalten wie die Quadrate entsprechender Kanten, also auch wie die Quadrate ein und desselben Paares entsprechender Kanten, so kann man für jedes Paar entsprechender Flächen F_i und F_i' die Proportion bilden:

$F_i : F_i' = a^2 : a'^2$; bringt man diese Proportionen auf die Form:

$F_i : a^2 = F_i' : a'^2$, so lassen sich diese Gleichungen wegen der Gleichheit der Nenner (links a^2, rechts a'^2) leicht addieren und geben:

$\Sigma F : a^2 = \Sigma F' : a'^2$ oder

$O : O' = a^2 : a'^2$.

Umkehrung: Homologe Kanten (oder Höhen) ähnlicher Prismen verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Oberflächen.

Zusatz 1. Entsprechende Teile der Oberflächen ähnlicher Prismen verhalten sich wie die Quadrate homologer Kanten. Beweis ebenso.

Zusatz 2. Aus a und b folgt auch, daß bei ähnlichen Prismen die Quadrate der Inhalte sich wie die dritten Potenzen der Oberflächen oder entsprechende Teile derselben verhalten.

I. Aufgaben.

1. Eine Mauer ist 24,6 m lang, 3,2 m hoch und 0,65 m dick, wie viel Kubikmeter Mauerwerk hat sie?

2. Wie viel Hektoliter (hl) Wasser faßt ein rechtwinkeliges Reservoir, wenn es 5,26 m lang, 3,74 m breit und 1,78 m tief ist?

3. Eine oben offene Holzkiste ist außen 78,2 cm lang, 64,5 cm breit, 49,3 cm hoch und besteht aus 2 cm dicken Brettern. Wie groß ist die äußere und innere Oberfläche der Kiste, wie groß der Raum des Holzes und der Innenraum der Kiste?

4. Wie viele Festmeter Holz liefern 137 Baumstämme, von denen jeder 13,2 m Länge und 44 cm als kleinsten Durchmesser hat, wenn sie zu rechtwinkeligen Balken zubehauen werden, deren Breite sich zur Dicke wie 3 : 2 verhält?

5. Wie viel Regenwasser fällt auf eine geographische Quadratmeile bei 22 mm Regenhöhe? (1 g. M = 7,42 km.)

6. Ein senkrechtes Prisma hat als Grundfläche ein reguläres Dreieck (Viereck, Sechseck, Achteck) von der Kante a und einer Höhe h; wie groß ist dessen Mantelfläche, Oberfläche und Inhalt? $a = 0{,}16$ m, $h = 1{,}2$ m.

7. Eine regulär sechsseitige (achtseitige) senkrechte Säule hat 3,9 m Höhe und als Abstand je zweier gegenüberstehender paralleler Seitenflächen 0,26 m; wie groß ist ihr Inhalt?

8. Ein Eisenbahndamm hat 4,2 m obere Breite und 2,9 m Höhe, und auf der einen Seite eine Böschung von 60°, auf

der anderen von 45°; welchen Inhalt hat der laufende Meter dieses Dammes?

9. Auf eine Straße von 2,2 m Breite werden pro Kilometer 80 Fuhren Kies à $1^1/_3$ cbm gefahren; wie hoch wird die Kiesschichte bei gleichmäßiger Verteilung?

10. Ein Kanal ist oben 5,4 m, unten 3,2 m breit und 1,6 m tief; das Wasser steht darin 0,96 m hoch und fließt mit einer Geschwindigkeit von 0,65 m pro 1″. Wie viel Wasser liefert er in einer Sekunde?

11. Was wiegt ein Granitblock von 4,6 m Länge, 2,8 m Breite und 2,2 m Höhe, wenn das spezifische Gewicht 2,7 ist?

12. Was wiegt der laufende Meter Stabeisen von 3,5 cm Breite, 1,4 cm Dicke und 7,5 sp. G.?

13. Was wiegt ein Messingwürfel von 3,2 cm Länge und 8,6 sp. G.?

14. Wie groß ist Länge und Oberfläche eines aus Blech gefertigten Würfels, welcher 10 ℔ Spiritus vom sp. G. 0,81 faßt?

15. Ein Hektolitergefäß soll die Form eines Würfels haben; wie groß ist seine Kante?

16. Wie groß ist die Kante eines Würfels, welcher dem Volumen nach gleich der Summe (Differenz) zweier Würfel von den Seiten a und b ist, oder welcher n-mal so groß ist als der erste Würfel?

17. Ein Eisenstab von quadratischem Querschnitt und 85,2 cm Länge wiegt 13 ℔ 430 g; wie groß ist seine Breite und Dicke? sp. G. = 7,5.

18. Die Diagonale eines Würfels ist d; wie groß ist Kante Oberfläche und Inhalt? d = 5 cm.

19. Ein Bleigewicht von 10 kg soll in der Form eines rechtwinkeligen Parallelepipeds gegossen werden, bei welchem sich Länge zu Breite zu Höhe wie 4 : 3 : 5 verhält; wie groß sind seine Kanten, wenn das sp. G. 11,3 ist?

20. Ein Gefäß soll 25 ℔ Leinöl fassen vom sp. G. 0,91; wie groß müssen seine Kanten werden, wenn die Höhe die Hälfte der Länge, und die Breite $^2/_3$ von der Länge sein soll?

21. Ein Würfel wiegt 36 kg; was wiegt ein anderer von

demselben Stoffe, dessen Kanten um den dritten Teil größer (um den vierten Teil kleiner) sind?

22. Um wie viel Procent wird der Inhalt (die Oberfläche) eines Würfels größer, wenn jede Kante um 12% größer gemacht wird?

23. Die Oberflächen zweier Würfel verhalten sich wie $p : q$; wie verhalten sich ihre Kanten, wie ihre Inhalte?

24. Ein Würfel hat m-mal mehr Inhalt als ein anderer, wie vielmal ist seine Kante, wie vielmal seine Oberfläche größer?

25. Ein Würfel aus Stein vom sp. G. s hat die Kante a; wie groß muß die Kante eines gleichschweren Würfels aus Eisen vom sp. G. s' (oder Holz vom sp. G. s'') sein?

$$s = 2{,}66, \quad s' = 7{,}8, \quad s'' = 0{,}75.$$

26. Die Diagonalebene eines Würfels hat q qcm Fläche; wie groß ist Oberfläche und Inhalt des Würfels?

27. Der Kubikinhalt eines regulär-sechsseitigen geraden Prismas ist 750 ccm; die Mantelfläche ist 288 qcm; wie groß sind die Kanten?

28. In einem rechtwinkeligen Parallelepiped von 60 l Inhalt ist eine Kante $= 0{,}5$ m, die Diagonale $= 0{,}7$ m; wie groß sind die anderen Kanten?

29. Der Kubikinhalt eines senkrechten 7,2 m hohen Prismas, dessen Grundfläche ein reguläres Dreieck ist, ist 528,4 ccm; wie groß ist die Grundkante?

30. Ein senkrechtes dreiseitiges Prisma hat 4,2 cm Höhe, 30,24 qcm Mantelfläche und 9,072 ccm Inhalt, wie lange sind die Kanten, wenn die Grundfläche ein rechtwinkeliges Dreieck ist?

31. Ein rechtwinkeliges Parallelepiped hat eine Oberfläche von 94 qcm, eine Diagonale von 7 cm und eine Kante von 4 cm; wie groß ist der Inhalt?

32. Ein schiefes Parallelepiped hat als Grundfläche ein Parallelogramm von 8,2 m und 12,7 m Seitenlängen und 60° (45°) eingeschlossenem Winkel; die von der längeren Grundkante ausgehende Seitenfläche ist ein Rechteck, dessen andere Seite 18,2 m ist, und welches gegen die Grundfläche unter 60° geneigt ist. Wie groß ist das Volumen?

33. Ein rechteckiger Körper von den Grundkanten a und b, der Länge l und dem sp. G. s (>1) soll mit einem anschließenden, ebensolangen und überall gleichdicken Mantel umgeben werden, dessen Stoff (Holz) das sp. G. s' (<1) hat; wie dick muß der Mantel genommen werden, damit das Ganze unter Wasser getaucht, schweben bleibe. Wie wird die Lösung, wenn vom Mantel ein zur Kante a paralleler Teil fehlen soll?

34. Eine Platte hat als Grundfläche ein Sechseck mit Winkeln von je 120^0; ein Paar paralleler Seiten hat je 53 cm, jede andere Seite je 18,3 cm Länge; die Dicke (Höhe) der Platte ist 15,6 cm; wie groß ist ihr Inhalt?

35. Eine Steinsäule hat als Grundfläche ein Achteck mit Winkeln von je 135^0; zwei gegenüberliegende Seiten haben je 28 cm, die dazu senkrechten Seiten je 20, alle anderen je 15 cm Länge; die Höhe der Säule ist 1,53 m; wie groß ist ihr Inhalt?

36. Die drei verschiedenen Flächen eines rechtwinkeligen Parallelepipeds verhalten sich wie $2:3:4$, der Inhalt ist 1 l; wie groß sind die Kanten?

37. Bei einem rechtwinkeligen Parallelepiped von 1000 ccm Inhalt verhalten sich zwei Kanten wie $2:3$, während sich die dritte Kante zur Diagonale wie $4:5$ verhält; wie groß sind die Kanten?

29.

Pyramide.

Eine Pyramide ist ein ebenflächiger Körper, welcher begrenzt wird von einem beliebigen Polygon als Grundfläche und denjenigen Dreiecken, welche durch einen außerhalb der Ebene des Polygons gelegenen Punkt und je eine Seite des Polygons gelegt sind; diese Dreiecke nennt man die Seitenflächen, ihren gemeinsamen Punkt die Spitze der Pyramide, und die von der Spitze zu den Ecken der Grundfläche führenden Kanten die Seitenkanten. Die von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Senkrechte heißt Höhe.

Ist die Grundfläche eine reguläre Figur, so heißt die Verbindungslinie des Mittelpunktes der Grundfläche mit der Spitze die Axe; fällt die Axe mit der Höhe zusammen, so heißt die

Pyramide regulär. Senkrecht oder gerade heißt eine Pyramide nur dann, wenn die Grundfläche einen geometrischen Mittelpunkt hat, und die Höhe den Mittelpunkt der Grundfläche trifft; sonst heißt die Pyramide schief.

Die Summe der Seitenflächen heißt Mantel.

30.

Eigenschaften der Pyramide.

Lehrsätze. a. Schneidet man die Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, so ist die Schnittfläche der Grundfläche ähnlich, und die durch die Schnittfläche abgetrennte Pyramide ähnlich der ganzen Pyramide.

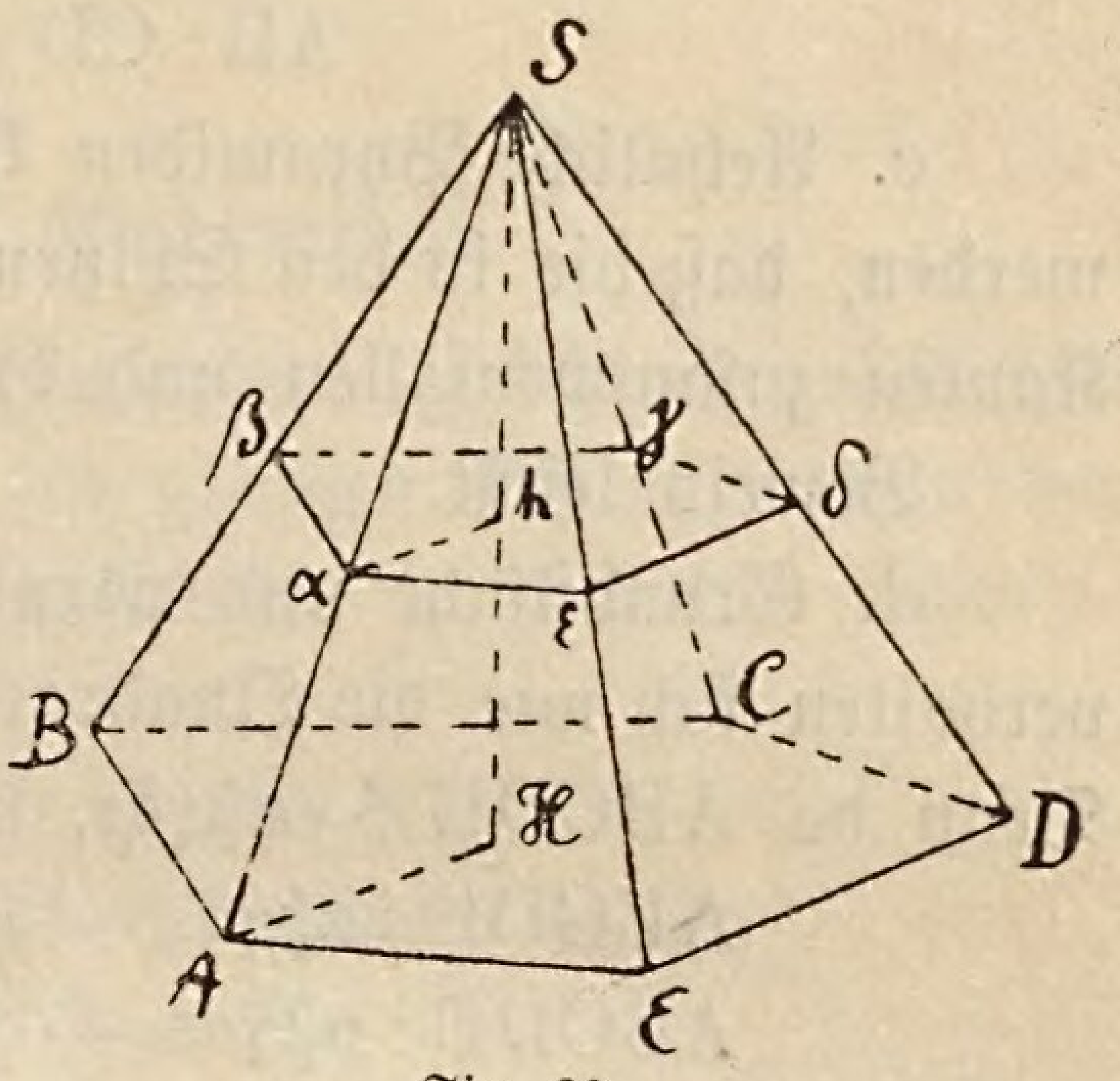


Fig. 30.

Beweis. Nach 12 a sind die Kanten AE und $\alpha\varepsilon$ parallel, ebenso ED $\#$ $\varepsilon\delta$ u. s. w. weshalb $\sphericalangle A = \sphericalangle \alpha$, $\sphericalangle E = \sphericalangle \varepsilon$ u. s. w. In $\triangle$ ASE ist ferner:

$AE : \alpha\varepsilon = SE : S\varepsilon$, und in $\triangle$ ESD ist

$ED : \varepsilon\delta = SE : S\varepsilon$; hieraus folgt:

$AE : \alpha\varepsilon = ED : \varepsilon\delta$. Ebenso beweist man die Gleichheit der Verhältnisse der anderen Paare entsprechender Seiten und schließt daraus, daß $ABCDE \sim \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$.

Um zu beweisen, daß Pyr $ABCDES \sim$ pyr $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon S$ hat man zu zeigen, daß alle entsprechenden Ecken congruent, und daß alle Paare entsprechender Kanten dasselbe Verhältnis haben. Daß nun Eck $A \cong$ Eck α folgt aus der Gleichheit der Kanten- und Flächenwinkel, zu dem Eck $S \cong$ Eck S von selbst, und die Gleichheit der Verhältnisse entsprechender Seiten ist schon erwiesen; daher Pyr $\sim$ pyr.

b. Die senkrechten Abstände der Grundfläche und parallelen Schnittfläche von der Spitze verhalten sich wie ein paar homologe Seiten.

Beweis: Ist $SH \perp$ Eb $ABCDE$, so lege man Eb SAH, welche die parallele Schnittfläche nach αh schneidet; dann ist, da $\alpha h \# AH$, $SH : Sh = SA : S\alpha = AE : \alpha\varepsilon$.

Man formuliere unter der Voraussetzung, daß $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \# ABCDE$ die in folgenden Proportionen enthaltenen allgemeinen Sätze:

$$SA : SC = S\alpha : S\gamma,$$
$$AB : \alpha\beta = SC : S\gamma,$$
$$AB : \alpha\beta = SH : Sh,$$
$$AB : CD = \alpha\beta : \gamma\delta.$$

c. Aehnliche Pyramiden können stets so in einander gelegt werden, daß die in den Spitzen zusammenlaufenden Flächen und Kanten zusammenfallen und die Grundflächen parallel sind.

Beweis leicht.

d. Grundfläche und parallele Schnittfläche einer Pyramide verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze. Denn da $ABCDE \sim \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, so ist:

$ABCDE : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = AB^2 : \alpha\beta^2$, also nach b

$ABCDE : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = SH^2 : Sh^2$. Auch ist

$ABCDE : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = SA^2 : S\alpha^2$.

Zusatz. Die Oberflächen ähnlicher Pyramiden oder entsprechender Teile derselben verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten oder Höhen. Denn analog 28b beweist man $O : o = AB^2 : \alpha\beta^2 = SH^2 : Sh^2 = SA^2 : S\alpha^2$.

Umkehrung: Homologe Seiten ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Oberflächen.

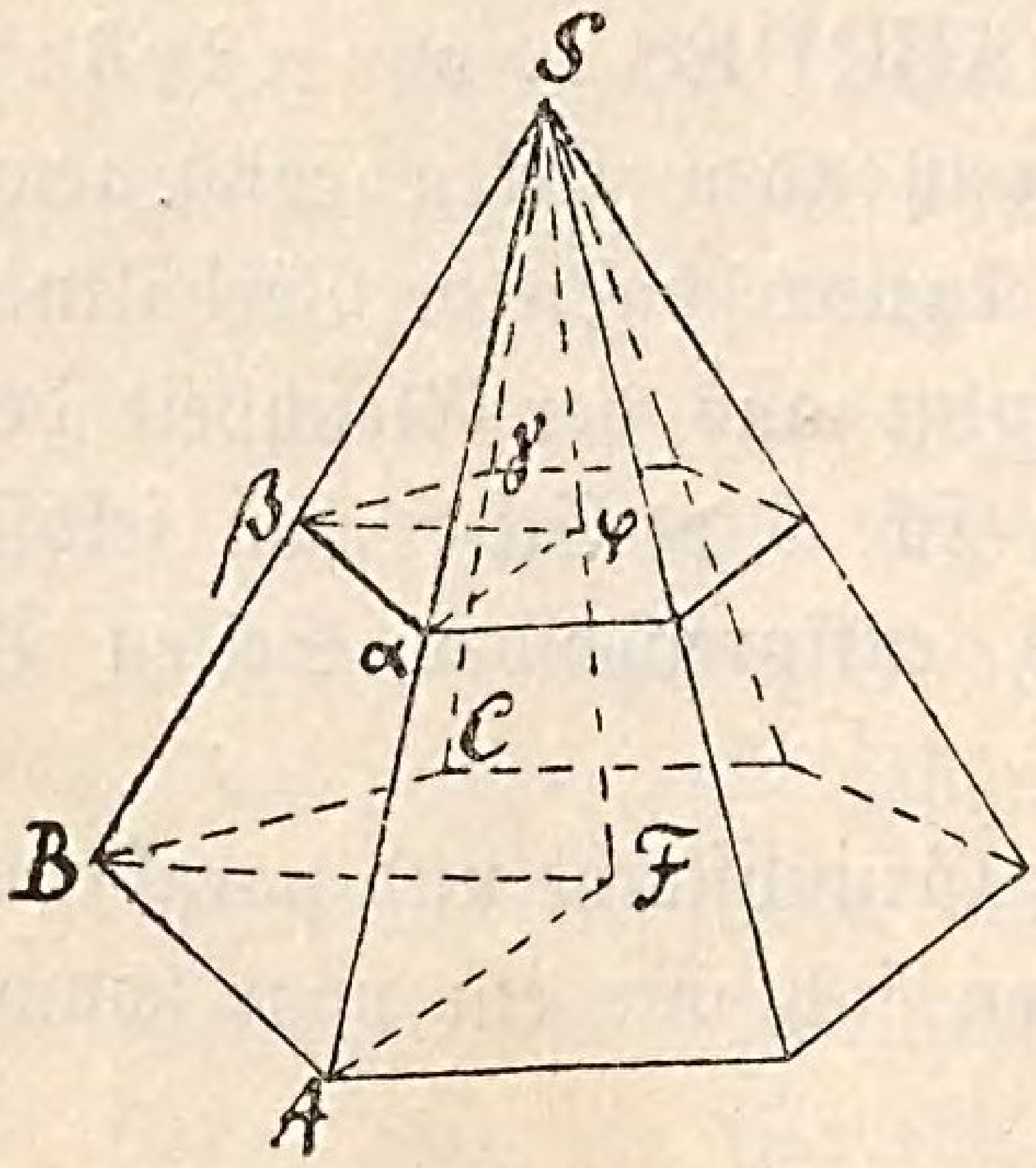


Fig. 31.

e. Eine durch die Spitze gehende Gerade schneidet die Grundfläche und die parallele Schnittfläche der Pyramide in homologen Punkten.

Beweis: Da zwei Punkte zweier ähnlichen Figuren dann homolog sind, wenn ihre Verbindungslinien mit entsprechenden Ecken gleiche Winkel mit entsprechenden Seiten bilden, oder wenn sie homologe Strecken in gleichem

Verhältnisse teilen, so kann der Beweis für F und φ auf folgende Weise gemacht werden. Wie in a beweist man, daß

$AF : \alpha\varphi = AS : \alpha S = AB : \alpha\beta$ und

$BF : \beta\varphi = BS : \beta S = AB : \alpha\beta$; daraus folgt

$\triangle ABF \sim \triangle \alpha\beta\varphi$, also F homolog φ.

Umkehrung. Die Verbindungslinie homologer Punkte in der Grundfläche und parallelen Schnittfläche einer Pyramide geht durch die Spitze.

Beweis indirekt durch d.

31.

Gleichheit von Pyramiden.

Lehrsätze. a. Haben zwei Pyramiden gleiche Grundflächen und gleiche Höhen und legt man in gleichen Abständen von der Spitze Ebenen parallel den Grundflächen, so sind die Schnittflächen einander gleich.

Beweis: Da $G : g = H^2 : h^2$ (**30** d.)

und $G_1 : g_1 = H^2 : h^2$ (**30** d.) so ist,

$g = g_1$, da $G = G_1$.

b. Zwei dreiseitige Prismen von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.

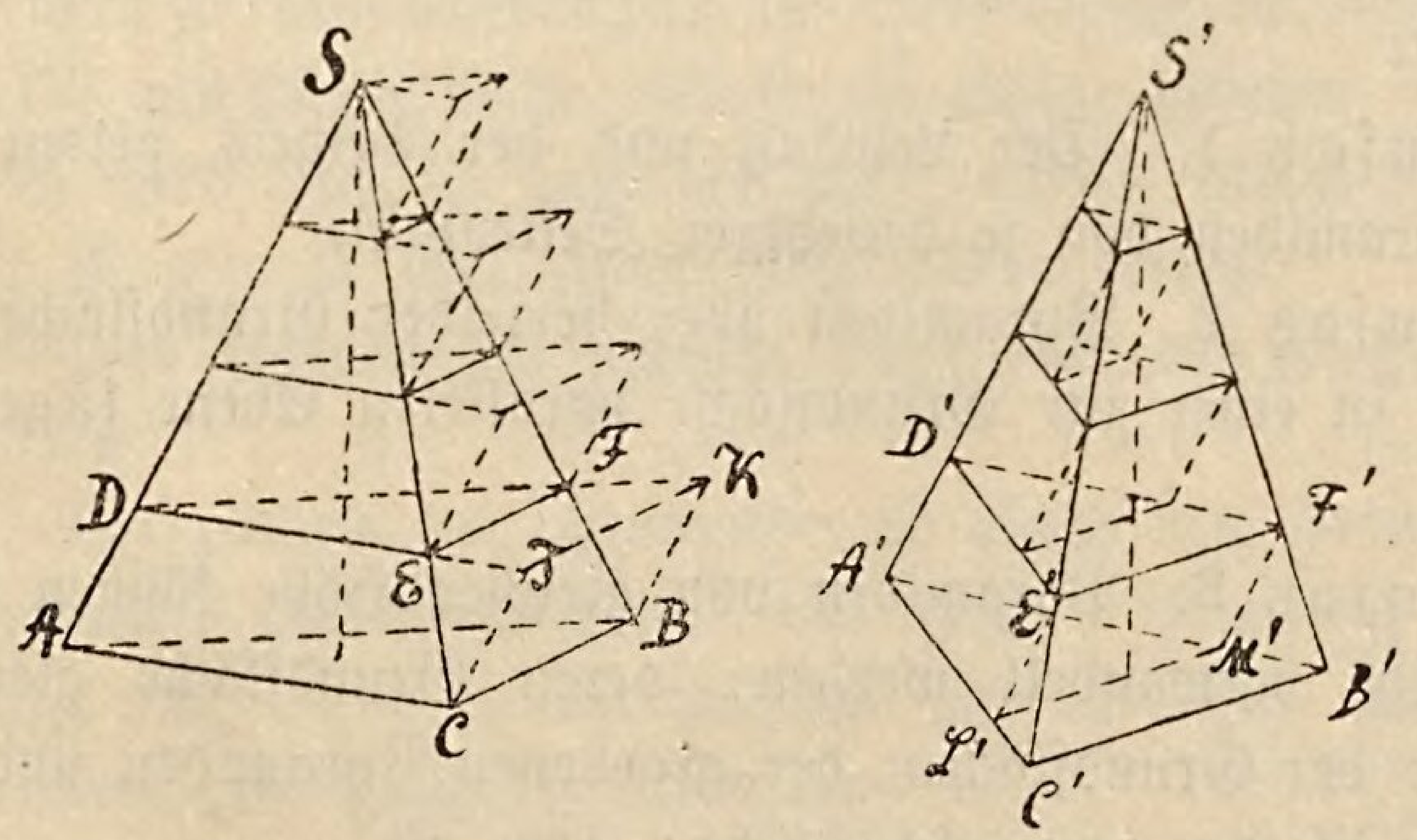


Fig. 32.

Beweis: Man teile die gleichen Höhen der beiden Pyramiden in je n gleiche Teile und lege durch die Teilpunkte Ebenen parallel den Grundflächen, so sind entsprechende Schnittflächen je einander gleich nach a. Man errichtet nun in der ersten

Pyramide P über der Grundfläche und jeder Schnittfläche nach aufwärts ein Prisma von der Höhe $= \frac{1}{n} h$; ebenso construiert man in der zweiten Pyramide P' über jeder Schnittfläche nach abwärts ein Prisma von der Höhe $\frac{1}{n} h$, so ist P kleiner als die Summe der zugehörigen Prismen, $P < \Sigma Pr$, P' aber größer als die Summe der zugehörigen Prismen, $P' > \Sigma Pr'$; nehmen wir also an, P sei größer als P', so ist der Unterschied zwischen P und P' doch kleiner als der Unterschied der Prismensummen, also $P - P' < \Sigma Pr - \Sigma Pr'$: In den Prismensummen sind aber je zwei Prismen einander gleich, da sie gleiche Grundflächen und Höhen haben, weshalb sich die Differenz $\Sigma Pr - \Sigma Pr'$ auf das unterste Prisma ABCDIK reduziert, so daß $P - P' <$ ABCDIK. Teilt man nun die Höhe in ungemein viele Teile, so wird die Höhe jedes Prismas ungemein klein, und man kann es durch Vergrößerung von n dahin bringen, daß ABCDIK kleiner wird, als eine beliebig kleine Größe; da aber $P - P' <$ ABCDIK, so folgt, daß P nicht größer sein kann als P'. Ebenso beweist man, daß P nicht kleiner sein kann als P', indem man bei P die Prismen nach abwärts, bei P' nach aufwärts construirt. Man schließt also $P = P'$.

Zusatz 1. Der Lehrsatz und der Beweis gelten ebenso für Pyramiden von je beliebiger Seitenzahl.

Zusatz 2. Pyramiden über derselben Grundfläche, deren Spitzen in einer zur Grundfläche parallelen Ebene liegen, sind gleich.

Zusatz 3. Pyramiden von gleicher Höhe können in eine Pyramide verwandelt werden, deren Grundfläche gleich der Summe der Grundflächen der gegebenen Pyramiden und deren Höhe gleich der gemeinschaftlichen Höhe ist.

Lehrsatz zur Uebung: Eine Pyramide ist gleich der Summe zweier Pyramiden, welche dieselbe Grundfläche besitzen und deren Höhen in Summe gleich der gegebenen Höhe ist. Beweis: Man beginne mit dreiseitiger Pyramide, lege durch den Teilpunkt der Höhe ein Dreieck # und $\cong$ der Grundfläche, verbinde seine

Ecken mit der Spitze und beweise, daß die so erhaltene Pyramide gleich dem Teil der gegebenen Pyramide ist, welcher übrig bleibt, wenn man von ihr eine Pyramide mit dem untern Teil der Höhe wegschneidet (durch zweimalige Anwendung von Zus. 2).

32.

Inhalt der Pyramide.

Lehrsatz. Jedes dreiseitige Prisma läßt sich in drei gleich große Pyramiden zerlegen.

Beweis: Vom dreiseitigen Prisma ABCDEF trennt man durch die Ebene AFB die dreiseitige Pyramide ABCF ab, welche mit dem Prisma gleiche Grundfläche ABC und, weil F in △ DFE, auch gleiche Höhe hat. Nach der Abtrennung bleibt übrig die vierseitige Pyramide ADEBF; durch Ebene DFB zerlegt man sie in die Pyramiden DEBF und DABF; bei DEBF kann man DEF als Grundfläche und B als Spitze ansehen; sie ist also gleich der zuerst abgeschnittenen ABCF. Beim dritten Stück ADBF kann man die Spitze F nach C verlegen, da FC ⧣ Eb ADB, kann sie also verwandeln in ADBC, und bei dieser kann man ABC als Grundfläche und D als Spitze ansehen, wodurch ersichtlich wird, daß sie auch der Pyr. ABCF gleich ist. Das Prisma ist also in drei gleiche Pyramiden zerlegt.

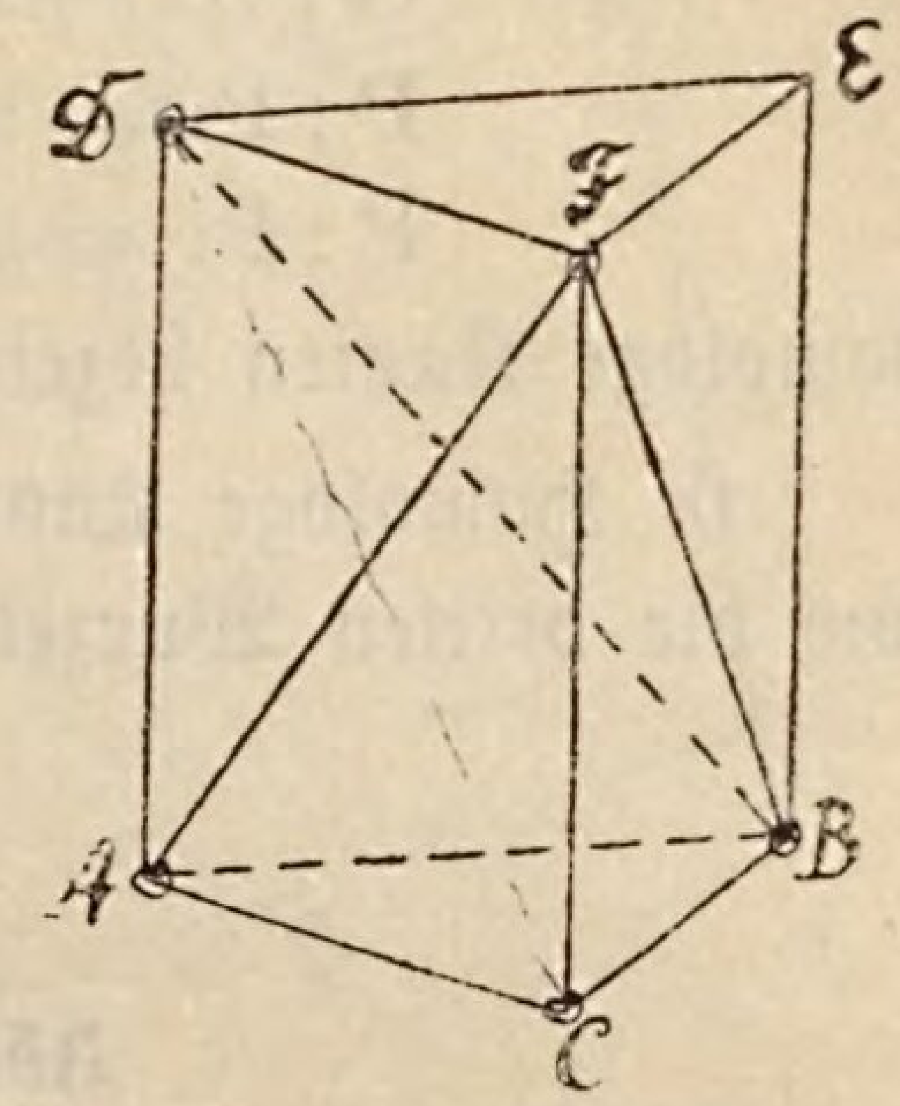


Fig. 33.

Hieraus ergeben sich folgende Sätze über den Inhalt der Pyramiden:

1. Der Inhalt der Pyramide ist gleich dem dritten Teil des Produktes aus Grundfläche mal Höhe. Ableitung für die dreiseitige aus vorstehendem Lehrsatz und 26, für die mehrseitige durch Zerlegung in dreiseitige.

$$\text{Pyr} = \frac{1}{3} G \,.\, h.$$

2. Pyramiden verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen.

3. Pyramiden von gleichen Grundflächen verhalten sich

wie die Höhen, Pyramiden von gleichen Höhen verhalten sich wie die Grundflächen.

4. Pyramiden sind gleich, wenn die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen gleich sind, oder wenn ihre Grundflächen sich umgekehrt verhalten wie ihre Höhen.

5. Aehnliche Pyramiden verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Höhen oder entsprechender Kanten. Denn aus

$P : P_1 = G\,h : G_1\,h_1$ und

$G : G_1 = h^2 : h_1^2$ (nach 30 d Zus.) folgt

$P : P_1 = h^3 : h_1^3$ und nach 30 b folgt

$P : P_1 = a^3 : a_1^3$, wenn a und a_1

homologe Kanten bezeichnen.

6. Homologe Kanten ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die dritten Wurzeln aus den Inhalten der Pyramiden.

33.

Abgestutzte Pyramide.

Erklärung. Schneidet man eine Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, so wird der zwischen der Grundfläche und parallelen Schnittfläche liegende Teil der Pyramide ein Pyramidenstumpf oder eine abgestumpfte, abgestutzte Pyramide genannt. Die der Grundfläche parallele Fläche wird auch Gegenfläche oder Deckfläche, der senkrechte Abstand der beiden Flächen wird Höhe genannt.

Lehrsatz. Der Inhalt eines Pyramidenstumpfes ist gleich dem dritten Teil des Produktes aus der Höhe mal der Summe aus Grund- und Deckfläche und ihrem geometrischen Mittel.

$$J = \frac{1}{3} h \left(G + g + \sqrt{G \, . \, g}\right)$$

Bezeichnet man mit x die Höhe der Ergänzungspyramide, welche nämlich den Stumpf zur vollen Pyramide ergänzt, so berechnet sich der Inhalt des Stumpfes als Differenz der großen und der Ergänzungspyramide:

$$J = \frac{1}{3} G\,(h + x) - \frac{1}{3}\,g\,x.$$

Berechnet man x aus

$$(h + x) : x = \sqrt{G} : \sqrt{g} \quad (30\,d) \text{ als}$$

$$x = \frac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

und setzt dies ein, so ergibt sich nach einigen Vereinfachungen obige Formel.

Eine andere Herleitung dieser Formel erhält man durch Zerlegung der abgestumpft. Pyr ABCDEF ähnlich wie in 32. Schneidet man nämlich durch Eb AFB die Pyr. ABCF $= \frac{1}{3}$ G . h und vom Rest durch Eb BDF die Pyr. EDFB $= \frac{1}{3}$ gh ab so bleibt Pyr. ABDF; verlegt man deren Spitze F durch FI ⋕ DA nach I und betrachtet sie als ABIF, so ist sie $= \frac{1}{3} \triangle$ ABI . h. Nun sei △ ABI mit x bezeichnet,

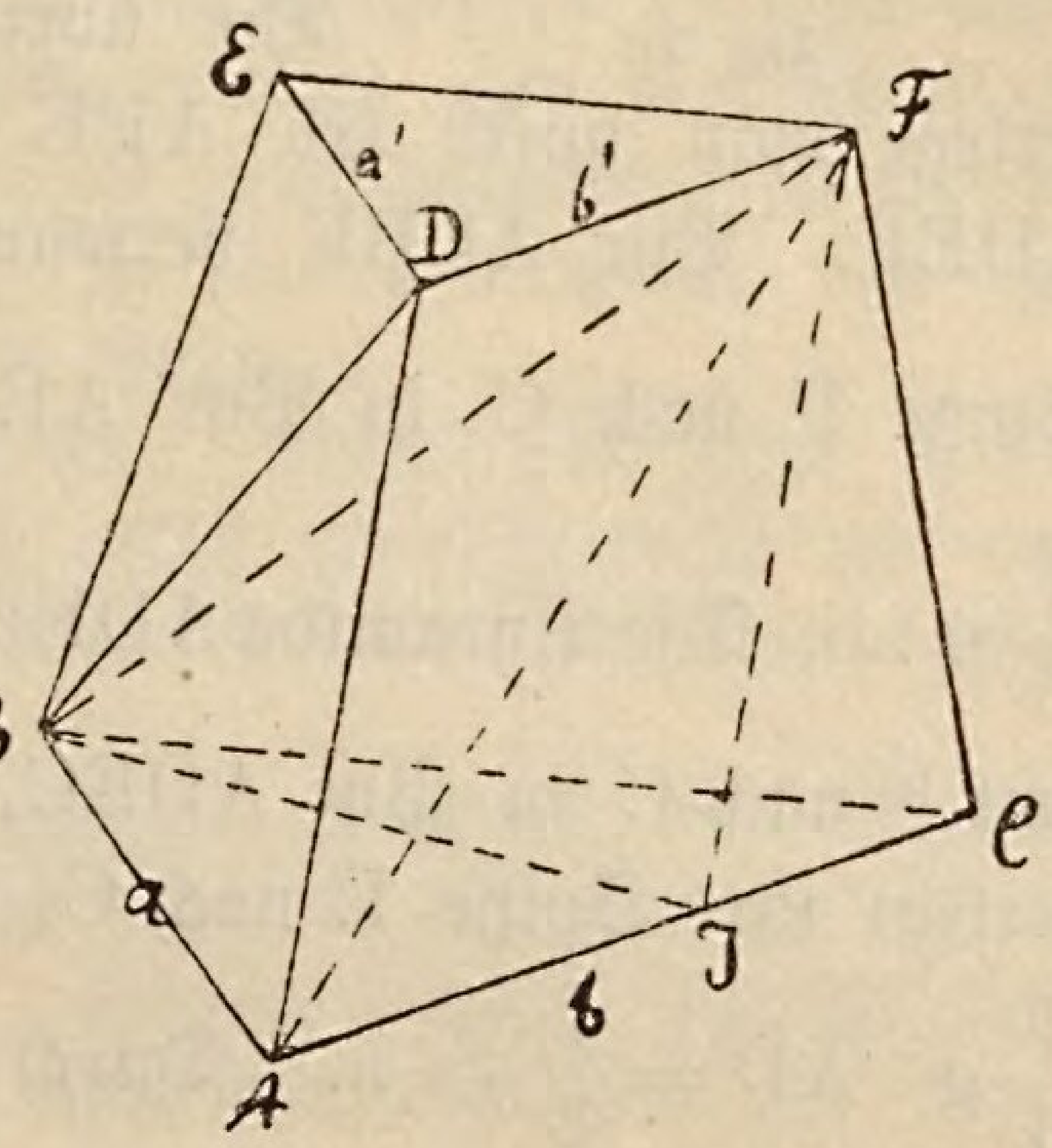


Fig. 34.

so ist △ ABC : △ ABI = AC : AI, also G : x = b : b′
ferner △ ABI : △ EDF = AB : ED, also x : g = a : a′,

da b : b′ = a : a′, so folgt G : x = x : g, also $x = \sqrt{G\,g}$; weshalb die dritte Pyramide ABDF $= \frac{1}{3}\sqrt{G\,g}\,.\,h$. Durch Zusammensetzen erhält man die Formel.

34.

Schief abgeschnittenes Prisma.

Erklärung: Sind bei einem prismatischen Raum die Gegenflächen nicht parallel, so nennt man den zwischen den Gegenflächen liegenden prismatischen Raum ein schief abgeschnittenes Prisma.

Lehrsatz. Ein gerades, schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma ist gleich dem Produkt aus der Grundfläche mal dem arithmetischen Mittel der Seitenkanten.

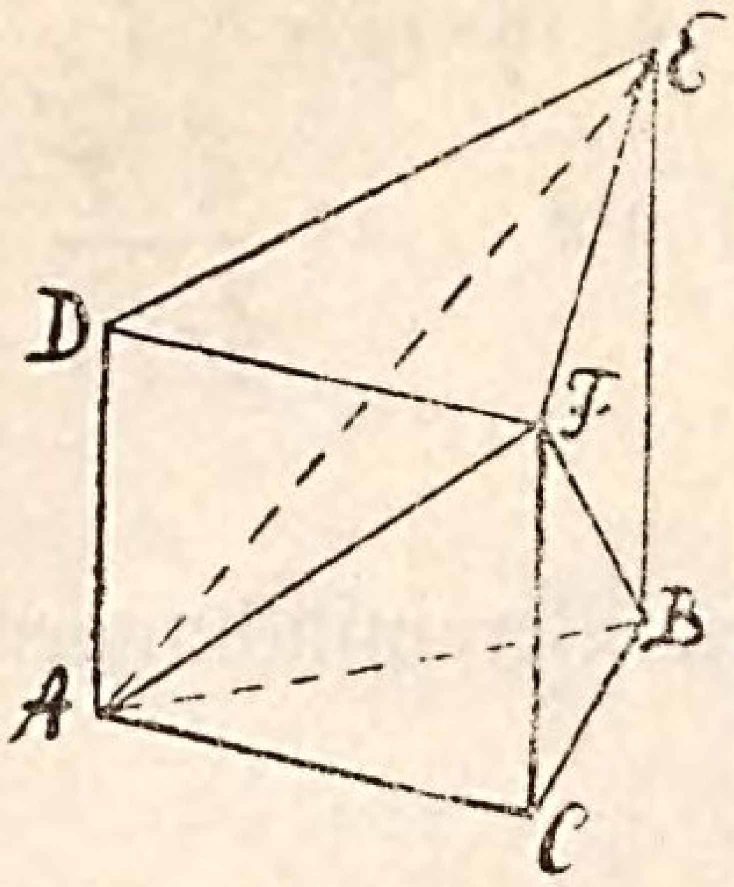


Fig. 35.

Beweis: Es sei ABC die auf den Seitenkanten senkrechte Grundfläche, DEF die dazu schiefe Deckfläche, so zerlege man das Prisma ähnlich wie in 32 in Pyramiden. Die Ebene AFB trennt ab die Pyramide ABCF $= \frac{1}{3}$ g . CF $= \frac{1}{3}$ G . c. Die übrig bleibende Pyramide ADEBF zerlege man durch Eb AFE in die Pyramiden AEBF und ADEF. Pyr AEBF verwandelt man durch Verlegung der Spitze F nach C in Pyr AEBC, so ist sie $= \frac{1}{3}$ g. BE $= \frac{1}{3}$ g . b. Die Pyramide ADEF verwandelt man durch Verlegung von F nach C in Pyr ADEC, betrachtet diese als Pyr ADCE, verlegt ihre Spitze E nach C, so ist sie = Pyr ADCB, also $= \frac{1}{3}$ g . AD $= \frac{1}{3}$ g . a. Durch Addition hat man

$$\text{ABCDEF} = \frac{1}{3}\,\text{ga} + \frac{1}{3}\,\text{gb} + \frac{1}{3}\,\text{gc}.$$

$$= \text{g} \cdot \frac{\text{a} + \text{b} + \text{c}}{3}.$$

Zusatz 1. Dreiseitige schief abgeschnittene Prismen desselben prismatischen Raumes sind gleich, wenn die Summen ihrer Seitenkanten gleich sind.

Zusatz 2. Ein schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma ist gleich dem Produkt aus dem zu den Seitenkanten senkrechten Querschnitt mal dem arithmetischen Mittel der Kanten.

Uebungssatz 1. Ist ein senkrechtes Prisma, dessen Grundfläche ein Rechteck, Parallelogramm oder Rhombus ist, schief abgeschnitten, so ist sein Inhalt gleich dem Produkt aus Grundfläche mal dem arithmetischen Mittel zweier gegenüberliegender Seitenkanten.

Anleitung: Man leite zwei Formeln für den Inhalt ab, indem man das Prisma in zwei dreiseitige Prismen längs der einen oder längs der andern Diagonalebene zerschneidet; durch Gleichsetzen der Formeln ergibt sich eine Relation zwischen den Seitenkanten, mittels deren die Inhaltsformel vereinfacht werden kann.

Zusatz: Das arithmetische Mittel zweier gegenüberliegenden Seitenkanten ist gleich der durch den Mittelpunkt der Grundflächen gehenden Höhe, welche man auch Achse nennt.

Zusatz: Ein schiefes abgeschnittenes Prisma, dessen senkrechter Querschnitt ein Rechteck, Parallelogramm oder Rhombus ist, ist gleich dem Produkt aus dem Querschnitt mal der Achse. Man mache einen synthetischen Beweis, indem man durch den Endpunkt der Achse einen senkrechten Querschnitt legt, und nachweist, daß das hiedurch vom schief abgeschnittenen Prisma abgeschnittene Stück, gleich ist dem Stück, welches man dem schief abgeschnittenen hinzufügen müßte, um es zum senkrechten zu machen. Dies geschieht durch Zerlegung in je drei Pyramiden von entsprechend gleichen Grundflächen und Höhen.

Uebungssatz 2. Ein Prisma, dessen senkrechter Querschnitt ein reguläres Vieleck ist, ist gleich dem Produkte aus dem senkrechten Querschnitt mal der Achse. Beweis synthetisch analog dem vorigen.

Uebungssatz 3. Jede Pyramide ist gleich dem Produkt aus einer Seitenkante mal der Projektion der Grundfläche auf die zur Seitenkante senkrechte Ebene. Beweis analog 34 für Pyr. AEFD bei dreiseitiger; Zerlegung mehrseitiger.

II. Aufgaben.

1. Bestimme Oberfläche und Inhalt einer senkrechten Pyramide mit quadratischer Basis, deren Grundkante = a (8,26 m) und deren Höhe = h (6,15 m).

2. Bestimme Oberfläche und Inhalt einer senkrechten quadratischen Pyramide aus der Grundkante a und der Seitenkante a (b, 2a); oder aus der Grundkante a und der Höhe $= 1\frac{1}{2}$ a; oder aus der Seitenkante = 2c und der Höhe = c, oder aus der Seitenkante b und der Höhe h.

3. Bestimme Oberfläche und Inhalt einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide, von welcher gegeben ist: Grundkante a (7,2 cm) und Höhe h (4,5 cm, $\frac{2}{3}$ a); oder Grundkante a und Seitenkante a (2 a, $1\frac{1}{2}$ a, $\frac{3}{4}$ a); oder Seitenkante b und Höhe h ($\frac{1}{2}$ b).

4. Aus dem Kubikinhalte k (oder aus der Oberfläche o) einer regelmäßigen vier- (drei-)seitigen Pyramide, deren Kanten sämmtlich gleich a sind, berechne man die Kante und die Mantelfläche (oder den Inhalt). k = 1 cbm.

5. Die Oberfläche einer regulären vier- (drei-, sechs-)seitigen Pyramide, deren Höhe doppelt ($1^1/_2$ mal) so groß ist als die Grundkante, sei O (17,324 qm); man berechne Grundkante, Höhe und Inhalt.

6. Ein Erdhaufen hat die Form einer senkrechten Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck von 3,8 m und 2,94 m Seitenlänge ist, die Seitenkante mißt 2,63 m; welchen Inhalt hat der Haufen?

7. Eine quadratische Steinpyramide, deren Höhe sich zur Grundkante wie 3 : 7 verhält, wiegt bei 2,6 sp. G. 920 kg; wie groß sind die Kanten?

8. Einen Getreidehaufen schütte ich in ein rechtwinkeliges Eck, ebne die vordere Fläche und messe die Längen der im Eck zusammenstoßenden Kanten = 1,84 m, 2,17 m und 1,22 m; welchen Inhalt hat der Haufen? Wie ergibt sich der Inhalt des Haufens, wenn die Längen der Kanten der vorderen Fläche = 2,58 m, 2,93 m, 3,22 m gemessen werden? Wie groß ist diese vordere Fläche, wenn die im Eck zusammenstoßenden Kanten a, b, c sind?

9. Ueber einem regulären Drei- (Sechs-)Eck mit der Seite a soll ein senkrechtes Prisma und eine senkrechte Pyramide von gleicher Höhe so errichtet werden, daß die Mantelflächen beider Körper einander gleich sind. Wie groß ist die Höhe?

10. Bei einer regulären vier- (drei-)seitigen Pyramide ist die Grundkante a, die Mantelfläche doppelt so groß als die Grundfläche; wie groß ist Höhe und Inhalt?

11. Der Inhalt einer senkrechten quadratischen Pyramide, bei welcher die Mantelfläche doppelt so groß ist als die Grundfläche, ist k; man berechne die Kanten und den Inhalt.

12. Die Mantelfläche einer regulären sechsseitigen Pyramide ist 90 qm, die Grundkante ist 5 m, wie groß ist der Kubikinhalt?

13. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein reguläres Vier- (Drei-, Fünf-)Eck, um welches sich ein Kreis vom Radius r (2 m) beschreiben läßt; die Seitenflächen sind reguläre Dreiecke; wie groß ist Oberfläche und Inhalt?

14. Die Grundkante einer regelmäßigen achtseitigen Pyramide ist 7,8 cm, die Länge einer Seitenkante ist 12 cm; man soll Oberfläche und Inhalt bestimmen?

15. Ein Körper besteht aus einem regulären sechs-, (vier-, acht-)seitigen Prisma und zwei auf dessen Gegenflächen als Grundflächen aufgesetzten regulären Pyramiden, und ist so gebildet, daß der durch eine Seitenkante des Prismas und die Spitzen der Pyramiden gehende (Achsen-)Schnitt ein reguläres Sechseck ist. Der Inhalt des Körpers ist J; wie groß sind seine Kanten und die ganze Höhe?

16. Ein Körper besteht aus einem senkrechten quadratischen Prisma von der Grundkante a und der Höhe h und einer auf seine Deckfläche aufgesetzten senkrechten Pyramide. Wie groß muß deren Höhe sein, damit der Körper, ins Wasser getaucht, gerade bis zur Pyramide einsinke, wenn das sp. G. = s = 0,74 ist?

17. In eine senkrechte quadratische Pyramide, deren Grundkante = a, Höhe = h, ist ein Würfel so gestellt, daß vier seiner Ecken in der Grundfläche, die vier anderen Ecken in den Seitenkanten der Pyramide liegen; wie groß ist Kante und Inhalt des Würfels?

18. Wie stellt sich die Lösung von 17., wenn die Pyramide regelmäßig dreiseitig und der einzustellende Körper ein ebensolches Prisma sein soll, dessen Seitenkante gleich der Grundkante ist?

19. Wie groß ist Grundkante und Inhalt einer quadratischen Pyramide, wenn ihre Höhe = 1,6 m und ihre Oberfläche = 1,8 qm beträgt?

20. In eine senkrechte Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck von den Seiten a und b, und deren Höhe = c ist, soll ähnlich wie in 17 ein rechtwinkeliges Parallelepiped eingestellt werden, bei welchem die Grundkanten und die Höhe in demselben Verhältnisse stehen wie bei der Pyramide. Man bestimme diese Grundkanten und die Höhe, sowie das Verhältnis beider Körper?

21. Auf die Seitenflächen eines Würfels von der Kante a

wird je eine 4seitige Pyramide von der Höhe $1/4$ a gestellt; wie groß ist Inhalt und Oberfläche des so entstandenen Körpers (des Tetrakishexaeders der Krystallographie)?

21. Auf die Seitenflächen des Tetraeders*) (Oktaeders)**) von der Kante a wird je eine dreiseitige senkrechte Pyramide von der Höhe $1/4$ a gestellt; wie groß ist Oberfläche und Inhalt des so entstandenen Körpers (Triakistetraeder, welcher auch Trigondodekaeder heißt, resp. Triakisoktaeder)?

23. Von einem Würfel von der Kante a schneidet man die Ecken durch Ebenen ab, welche durch die Mitten der je drei im Eck zusammenlaufenden Kanten des Würfels geht. Man berechne Oberfläche und Inhalt des übrig bleibenden Körpers?

24. Von einem Würfel von der Kante a schneidet man die Ecken durch Ebenen ab, so daß aus den Würfelflächen reguläre Achtecke werden. Man berechne Oberfläche und Inhalt des übrig bleibenden Körpers.

25. Von einem Tetraeder (Oktaeder) von der Kante a schneidet man die Ecken durch Ebenen ab, so daß aus den Tetraeder- (Oktaeder-)Flächen reguläre Sechsecke werden. Man berechne Oberfläche und Inhalt des übrig bleibenden Körpers?

Abgestutzte Pyramide.

26. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt einer abgestutzten quadratischen (regelmäßig drei-, sechsseitigen) Pyramide, deren Grundkante = a, Deckkante = b, Höhe = h ist? ($a = 51$, $b = 32$, $h = 61$).

27. Der Inhalt einer abgestutzten Pyramide sei 38 cbm, die Grundfläche 9 qm, die Höhe 6 m; wie groß ist die Deckfläche?

28. Die Deckfläche einer 1,4 m hohen, abgekürzten Pyramide ist ein Rechteck von 24 cm und 15 cm Seitenlänge; die

*) Tetraeder ist eine reguläre dreiseitige Pyramide von lauter gleichen Kanten.

**) Oktaeder ist eine über (und unter) einer quadratischen Basis errichtete senkrechte Doppelpyramide von lauter gleichen Kanten; er ist von 8 gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

Grundfläche hat 0,4 qm Inhalt. Man soll die Kanten und den Inhalt berechnen?

29. Von einer abgestutzten Pyramide mit rechteckiger Basis kennt man den Inhalt k, die Höhe h und ein Paar entsprechender Kanten der Gegenflächen, nämlich a und b, man berechne das andere Paar.

30. Ein Wasserreservoir soll die Form einer abgestutzten Pyramide haben; es soll oben 2,25 m lang und 1,80 m breit sein, unten überall um $^1/_3$ kürzer sein und 40 hl fassen; wie tief muß es sein?

31. Inhalt und Oberfläche einer senkrechten quadratischen (3 seitigen) abgestutzten Pyramide aus den Grund- und Deckkanten a und b und aus der Seitenkante s zu berechnen?

32. Eine abgestutzte quadratische Pyramide ist 8,2 cm hoch und hat 207,7 ccm Inhalt; wie groß sind die einzelnen Kanten, wenn die Kanten der Deckfläche um je 1 cm kleiner sind als die der Grundfläche?

33. Eine senkrechte abgestutzte Pyramide hat als Grund- und Deckfläche Quadrate von den Seiten a und b, die Mantelfläche ist ferner gleich der Summe aus Grund- und Deckfläche. Wie groß ist die Höhe?

34. Berechne den Inhalt einer regulären, achtseitigen, abgestutzten Pyramide, deren Grundkante = a, Deckkante = $^1/_2$ a, Höhe = $^6/_7$ a.

35. In einer abgestutzten, quadratischen Pyramide ist die Höhe halb so groß als die Grundkante a und die Grundfläche halb so groß als die Summe aus Mantel und Deckfläche. Wie groß ist die Deckkante und der Inhalt?

36. In einer senkrechten Pyramide, deren Basis ein gleichseitiges Dreieck von der Seite a und deren Höhe ebenfalls a ist, wird durch den Schwerpunkt, (den Endpunkt des ersten Viertels der Höhe von der Basis aus gemessen) eine Ebene parallel der Basis gelegt; durch den Schwerpunkt der oberen Pyramide wird wieder eine Ebene parallel der Basis gelegt; wie groß ist der Inhalt des zwischen beiden Ebenen liegenden Pyramidenstumpfes?

37. Von einem geraden quadratischen Pyramidenstumpfe ist die untere Grundkante = a, die obere = b und die Höhe = h (die Seitenkante = c) wie groß ist Inhalt und Oberfläche der ganzen Pyramide, von welcher der Stumpf ein Teil ist?

38. Eine reguläre dreiseitige Pyramide von 18 cm Grundkante und 24 cm Seitenkante wird im Abstande von 6 cm von der Basis durch eine zur Basis parallele Ebene abgeschnitten; wie groß ist der Stumpf?

39. In welchen Abstand von der Basis muß eine senkrechte quadratische Pyramide von 27 cm Grundkante und 20 cm Höhe abgeschnitten werden, damit der Inhalt des Stumpfes 3 l ist?

40. In welchem Abstand von der Spitze muß man eine 20 cm hohe Pyramide abschneiden, so daß der abgeschnittene Stumpf $^5/_8$ vom Ganzen ist, oder die Teile sich wie m : n verhalten, oder die obere Pyramide $^2/_5$ des Stumpfes ist?

41. Eine Pyramide hat eine Mantelfläche M und den Inhalt I; wenn ich sie nun durch eine zur Basis parallele Ebene so durchschneide, daß die Höhe im Verhältnis 7 : 12 (m : n) geteilt wird, wie groß sind die Mäntel und Inhalte der Teile?

42. Man soll ein Blechgefäß von der Form einer abgestutzten quadratischen Pyramide machen, bei welcher die obere Kante = $^3/_4$ der unteren, und die Höhe gleich der oberen Kante ist; sein Inhalt soll 10 l sein; welches ist die Form und Größe seiner Seitenflächen, und wie ist die Größe der Kanten abzuändern, um ein ähnliches Gefäß von 25 l Inhalt zu bekommen?

43. Ein Erdaufwurf hat als Grund- und Deckfläche Rechtecke, deren Seiten bezüglich parallel sind und als Seitenflächen Trapeze. Die Grundkanten messen 12,7 m und 8,4 m, die Deckkanten sind um je 3 m kleiner, die Höhe beträgt 1,5 m. Man berechne den Inhalt dieses Körpers, da man ihn nicht als abgestutzte Pyramide betrachten darf (warum?), durch Zerschneiden in Prismen und Pyramiden.

44. Man soll von einer abgestutzten Pyramide durch eine zur Basis parallele Ebene die Hälfte ($^1/_3$, $^3/_5$) abschneiden.

Anhang II.

Prismatoid und Obelisk.

a. Die Formel für den Inhalt der abgestutzten Pyramide kann abgeändert werden durch Einführung des Mittelschnittes, des in halber Höhe parallel der Basis geführten Schnittes.

Es ist nämlich:

$$\text{Abgestutzte Pyr} = \frac{1}{3} h (G + g + \sqrt{G \cdot g}).$$

Sind nun a und b entsprechende Seiten von G und g, so ist $\frac{1}{2}(a + b)$ die entsprechende Seite des Mittelschnittes, und ist dessen Fläche mit m bezeichnet, so hat man

$$\sqrt{G} : \sqrt{g} = a : b \text{ (30 d) also}$$

$(\sqrt{G} + \sqrt{g}) : \sqrt{g} = (a + b) : b$ (Summensatz der Proportionen); aber

$\sqrt{m} : \sqrt{g} = \frac{1}{2}(a + b) : b$ (30 d), woraus durch Vergleichung

$$\sqrt{G} + \sqrt{g} = 2\sqrt{m}; \text{ durch Quadrieren:}$$

$$G + g + 2\sqrt{Gg} = 4\,m, \text{ also}$$

$$\sqrt{Gg} = 2m - \frac{1}{2}(G + g); \text{ dies oben eingesetzt gibt}$$

$$\text{Abgestutzte Pyr} = \frac{1}{3} h \left(\frac{1}{2}(G + g) + 2\,m\right).$$

b. Diese Formel läßt sich auch durch Zerlegung herleiten. Man beginnt mit der dreiseitigen abgestutzten Pyramide, verwandelt dieselbe unter Beibehaltung der Grundfläche und Höhe in eine solche, bei welcher eine Seitenfläche senkrecht zur Grundfläche ist; sie sei ABCDEF (Fig. 36). Aus 31 a folgt, daß sowohl Deckfläche DEF als Mittelschnitt IKM dieselbe Größe (und Form) behalten haben.

Schneidet man durch Eb MAB die Pyr. ABCM $= \frac{1}{3} G \cdot \frac{1}{2} h$ und durch Eb DEM die Pyr. DEFM $= \frac{1}{3} g \cdot \frac{1}{2} h$ ab, so bleibt die vierseitige Pyramide ADEBM. Betrachtet man bei ihr das Trapez ADEB $= \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$ als Grundfläche und zieht ihre Höhe MN $= x$, welche mit der Höhe des Mittelschnittes IKM zusammenfällt, so ist

$$\text{Pyr. ADEBM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(a+b)\,h\,.\,x$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(a+b)\,x\,.\,h = \frac{1}{3}\,.\,2\,m\,.\,h$$

$$\text{Also ABCDEF} = \frac{1}{3}\,G\,.\,\frac{1}{2}\,h + \frac{1}{3}\,g\,.\,\frac{1}{2}\,h + \frac{1}{3} \cdot 2\,m\,.\,h$$

$$= \frac{1}{3}\,h\left(\frac{1}{2}(G+g) + 2\,m\right).$$

Mehrseitige abgestutzte Pyramiden zerlegt man in dreiseitige, wendet auf sie vorstehenden Satz an, vereinigt die erhaltenen Ausdrücke und erweist so die Gültigkeit der Formel für mehrseitige Pyramiden.

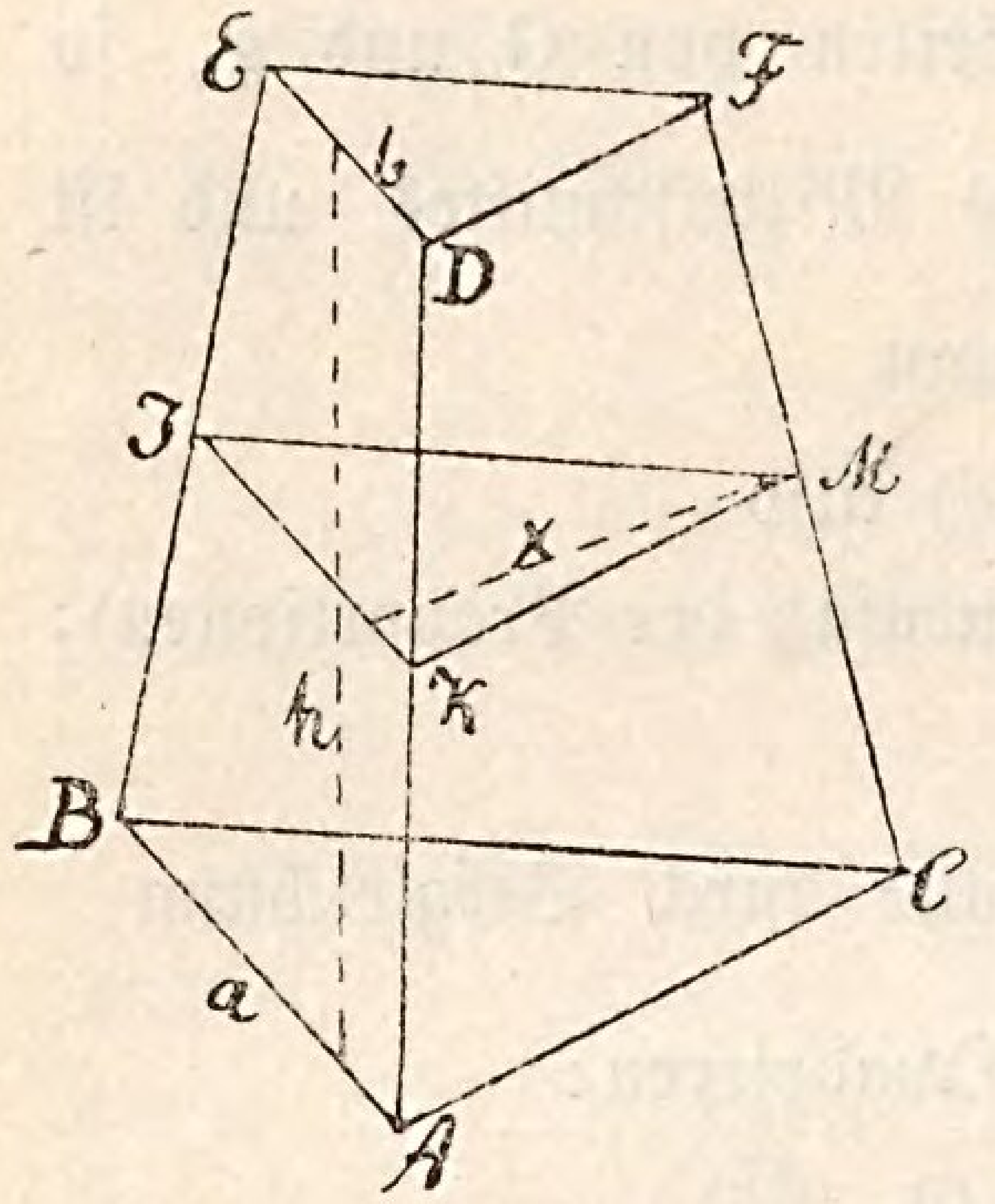


Fig. 36.

Erklärung. Ein Obelisk ist ein Körper, der begrenzt ist 1. von zwei in parallelen Ebenen liegenden Polygonen, deren Kanten je einander parallel liegen, 2. von Seitenflächen, welche als Trapeze durch je eine Deckkante und eine parallele Grundkante, oder als Dreiecke durch ein Eck der Deckfläche und eine solche Grundkante gelegt ist, welche keine parallele Deckkante hat. (Sind Grund- und Deckfläche ähnliche Polygone mit parallelen entsprechenden Seiten, so geht der Obelisk in eine abgestutzte Pyramide über).

Ein Prismatoid ist ein Körper, der begrenzt ist von zwei in parallelen Ebenen liegenden Polygonen als Gegenflächen und denjenigen Dreiecken als Seitenflächen, welche durch je ein Eck einer Gegenfläche und eine Seite der anderen Gegenfläche gelegt sind.

c. Der Inhalt des Obelisken und des Prismatoides ist

$$J = \frac{1}{3}\,h\left(\frac{1}{2}\,G + \frac{1}{2}\,g + 2\,m\right),$$

wenn G und g die Gegenflächen, m den Mittelschnitt bezeichnet.

Beweis: Man nehme im Innern des Körpers in der Mitte der (beliebig gezogenen) Höhe den Punkt M, lege durch ihn und die Grundfläche eine Pyramide $= \frac{1}{3}\,G\,.\,\frac{1}{2}\,h$, und durch ihn und die Deckfläche eine Pyramide $= \frac{1}{3}\,g\,.\,\frac{1}{2}\,h$. Den durch Wegnahme dieser Pyramiden übrig bleibenden Raum zerlegt man in Pyramiden, indem man M als Spitze und die einzelnen Seiten-

flächen als Grundflächen benützt. Ist die Seitenfläche ein Trapez, so ist nach b der Inhalt dieser vierseitigen Pyramide $= \frac{1}{3}$ h . 2 m_1, wenn m_1 wie in Fig. 36 den Mittelschnitt MIK bezeichnet.

Ist die Seitenfläche ein Dreieck, etwa ABC (Fig. 37), und der Mittelschnitt M a b $= m_2$, so verlege man die Spitze M durch MD $\#$ bB bis zu einem Punkt D der Gegenfläche, so ist

$$\text{Pyr. ABCM} = \text{Pyr. ABCD} = \text{Pyr. ABDC}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \triangle\, \text{ABD} \cdot \text{h}\,;\ \text{aber}\ \triangle\, \text{ABD} = 2 \cdot \triangle\, \text{ab M} = 2\, m_2,$$

$$\text{somit Pyr. ABCM} = \frac{1}{3} \cdot 2\, m_2 \cdot \text{h}.$$

Bildet man die Summe all dieser Pyramiden, so erhält man die Summe der Mittelschnitte, also den Mittelschnitt m des Körpers und hat

$$J = \frac{1}{3}\, \text{h} \left(\frac{1}{2}\, G + \frac{1}{2}\, g + 2\, m \right).$$

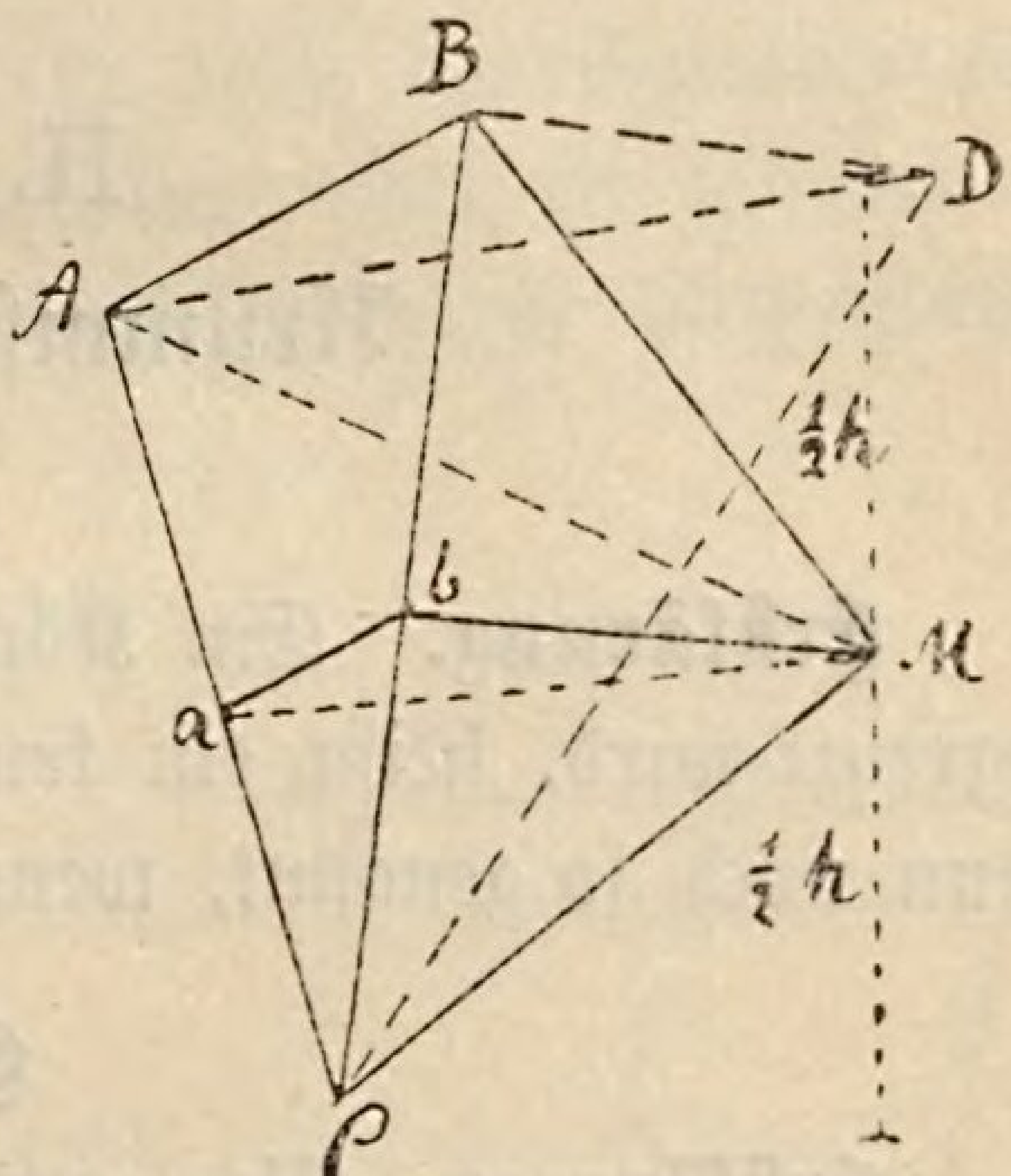


Fig. 37.

Zusatz. Durch passende Erweiterung der Gegenflächen und Seitenflächen läßt sich der Obelisk auch darstellen als Differenz von einer abgestutzten dreiseitigen Pyramide und der Summe mehrerer kleineren abgestutzten dreiseitigen Pyramiden.

Das Prismatoid kann durch Erweiterung derjenigen Seitenflächen, welche durch die Kanten einer Gegenfläche gehen und durch Erweiterung der anderen Gegenfläche dargestellt werden als Differenz zwischen einem Obelisken und der Summe mehrerer dreiseitigen Pyramiden. Durch Anwendung von a ergibt sich dann dieselbe Inhaltsformel.

Aufgaben. 1. Ein senkrechter Obelisk hat als Gegenflächen Rechtecke von den Seiten a, b und a', b' (a $\#$ a'); seine Höhe ist h. Man berechne Inhalt und Oberfläche. (Der Mittelpunkt der Deckfläche liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche).

2. Ein Obelisk hat als Basis ein Rechteck von den Seiten a und b (ein Quadrat von der Seite a). Die Deckfläche ist reducirt auf eine zur Kante a parallele Linie von der Länge c, deren Abstand von der Grundfläche = h ist. Wie groß ist sein Inhalt?

3. Ein Prismatoid hat als Grund- und Deckfläche congruente reguläre Dreiecke von den Kanten a; auch die Seitenflächen sind congruente gleichschenkelige Dreiecke von der Basis a und dem

Schenkel b. (Die Deckfläche liegt so, daß die Projektionen der oberen Ecken auf die Grundfläche mit den Ecken der Grundfläche ein reguläres Sechseck bilden). Wie groß ist der Inhalt? Wie groß ist der Inhalt, wenn die Seitenflächen auch reguläre Dreiecke sind? Wenn die Gegenflächen congruente Quadrate, reguläre Fünfecke sind?

4. Ein Obelisk hat als Grundfläche ein reguläres Sechseck (Achteck) von der Seite a, als Deckfläche ein reguläres Dreieck (Viereck) von der Seite a (b) und die Höhe h. Wie groß ist sein Inhalt? (Man stelle ihn auch als Differenz einer abgestutzten Pyramide und dreier Pyramiden dar.)

5. Ein Prismatoid hat als Grundfläche eine Strecke a, als Deckfläche eine rechtwinkelig (unter 60^0) kreuzende Strecke b; der senkrechte, kürzeste Abstand beider Strecken ist h; welchen Inhalt hat das Prismatoid? (Inhalt einer dreiseitigen Pyramide aus zwei gegenüberliegenden Kanten a und b, deren Kreuzungswinkel (40^0, 60^0) und kürzesten Abstand h zu bestimmen.)

II. Abschnitt.

Krummflächige Körper.

35.

Erklärung. Ein Körper, welcher von krummen Flächen begrenzt wird, heißt ein krummflächiger Körper, und wird auch dann noch so genannt, wenn ein Teil der Begrenzung eben ist.

Cylinder.

Erklärung. Eine cylindrische Fläche oder eine Cylinderfläche ist diejenige krumme Fläche, welche alle Geraden enthält, welche unter sich parallel sind und durch die einzelnen Punkte einer (geschlossenen) krummen Linie gehen. Man sagt auch: Eine Cylinderfläche entsteht, wenn eine Gerade, die Erzeugende, sich so bewegt, daß sie längs einer krummen Linie, der Leitlinie fortgleitet und dabei ihrer ursprünglichen Richtung parallel bleibt, oder: eine Cylinderfläche ist der geometrische Ort aller Geraden, welche unter sich parallel sind und durch die Punkte einer krummen Linie gehen. Diese Geraden nennt man auch die Seitenlinien oder Kanten.

Ist die krumme Linie, die Leitlinie, ein Kreis, so heißt

die Fläche eine Kreiscylinderfläche, und eine senkrechte Kreiscylinderfläche dann, wenn ihre Geraden senkrecht zur Kreisfläche stehen. (Letztere ist der geometrische Ort aller Punkte im Raume, welche von einer gegebenen Geraden einen vorgeschriebenen Abstand haben.)

Der von einer Cylinderfläche begrenzte, in der Richtung ihrer Geraden aber unbegrenzte Raum heißt ein cylindrischer Raum.

Schneidet man einen cylindrischen Raum durch zwei parallele Ebenen, so wird der zwischen diesen Ebenen liegende Teil des cylindrischen Raumes ein Cylinder genannt. Der Cylinder wird also begrenzt von zwei krummlinigen Figuren als Gegenflächen (Grund- und Deckflächen) und dem Teil der cylindrischen Fläche, welche zwischen den Gegenflächen liegt, dem Cylindermantel.

Ist eine Gegenfläche ein Kreis, so heißt der Cylinder ein Kreiscylinder und zwar ein senkrechter oder ein schiefer, je nachdem die Seitenlinie senkrecht oder schief zur Gegenfläche steht.

Lehrsatz. Beim Kreiscylinder ist auch die Deckfläche, sowie jede zur Grundfläche parallele Schnittfläche ein Kreis, welcher der Grundfläche congruent ist.

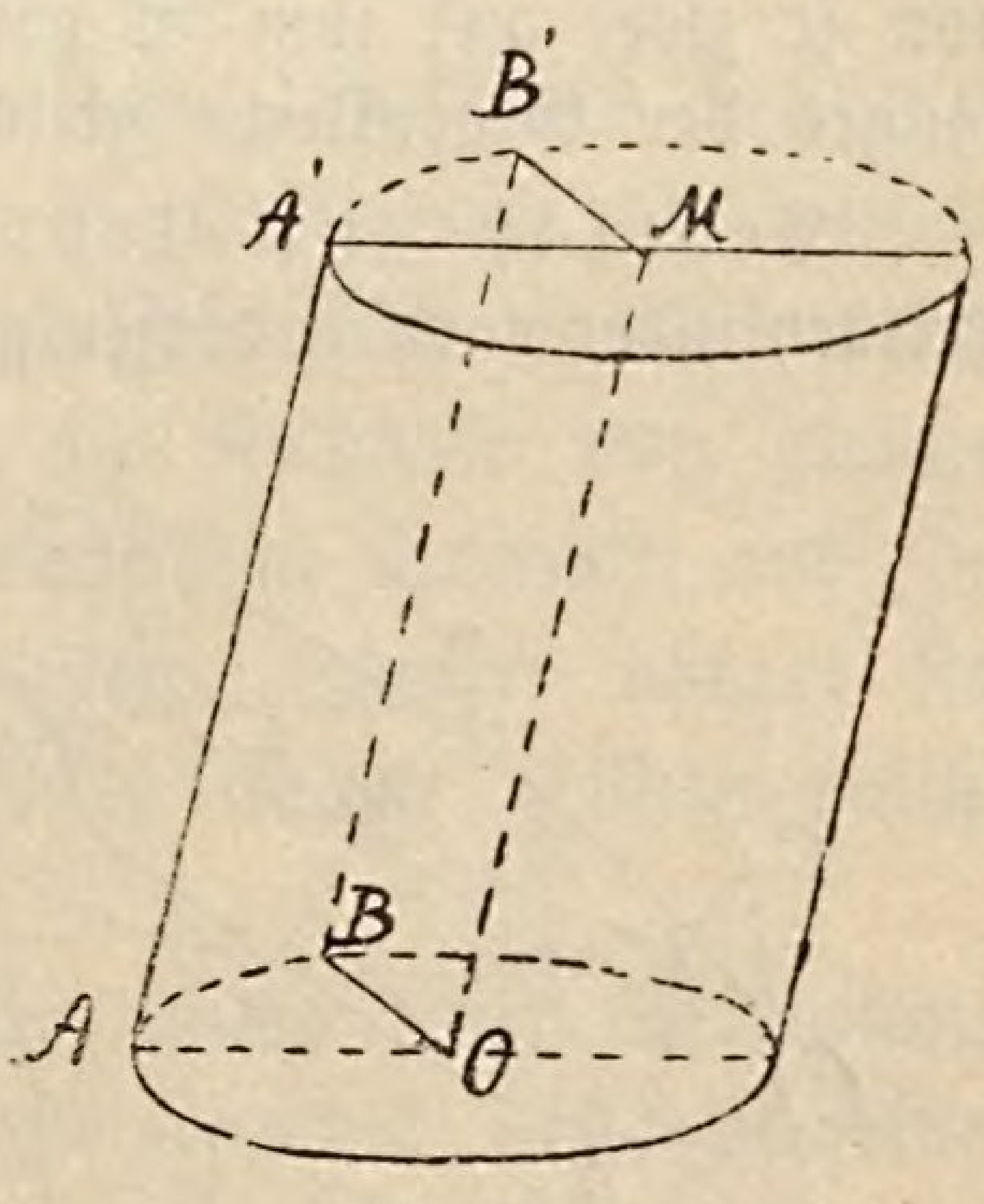


Fig. 38.

Beweis: Durch den Mittelpunkt O des Grundkreises lege man eine den Seitenkanten parallele Gerade, die Achse, welche die Deckfläche in M schneidet, lege durch OM und beliebige Seitenkanten je eine Ebene, so ist nach **12**a und **13**e AOMA' ein Parallelogramm also OA = MA', ebenso OB = MB' u. s. w.; aus OA = OB = ... folgt dann MA' = MB' = ... Derselbe Beweis paßt auch für eine zur Grundfläche parallele Schnittfläche.

Zusatz 1. Jede durch eine Seitenkante oder die Achse

gehende Ebene schneidet den Cylinder in einem Parallelogramm, den geraden Cylinder in einem Rechteck.

Zusatz 2. Alle Seitenkanten sind gleich.

Zusatz 3. Bei jedem Cylinder ist die Deckfläche, sowie jede der Grundfläche parallele Schnittfläche der Grundfläche congruent.

Beweis: Durch eine beliebige Seitenlinie legt man beliebige Ebenen und beweist, daß sie die Grund- und Deckfläche in je gleichen und parallelen Linien schneiden, woraus sich die Congruenz leicht ergibt.

36.

Der schief abgeschnittene Cylinder.

Erklärung. Ist die Deckfläche eines Cylinders nicht parallel der Grundfläche, so heißt der Cylinder schief abgeschnitten oder abgeschrägt. Geht die Ebene der Deckfläche durch einen und nur einen Punkt des Umfangs der Grundfläche (durch eine Tangente der Grundfigur) so liegt zwischen diesen Ebenen ein Cylinderhuf.

Beim abgeschrägten Kreiscylinder ist die Achse das arithmetische Mittel je zweier in einem Achsenschnitt liegender Seitenkanten. Der Punkt, in welchem die Achse die schräge Gegenfläche trifft, hat die Eigenschaft eines Mittelpunktes, insoferne als er von je zwei mit ihm in gerader Linie liegenden Punkten des Umfanges der Gegenfläche gleichweit absteht. Leicht.

Lehrsatz zur Uebung. Beim senkrechten abgeschrägten Kreiscylinder enthält derjenige Achsenschnitt, dessen Ebene auf beiden Ebenen senkrecht steht, sowohl die kürzeste als die längste Seitenkante und den größten Durchmesser der Deckfläche; ein zu diesem Achsenschnitt senkrechter Achsenschnitt enthält zwei gleiche Seitenkanten und den kleinsten Durchmesser der Deckfläche.

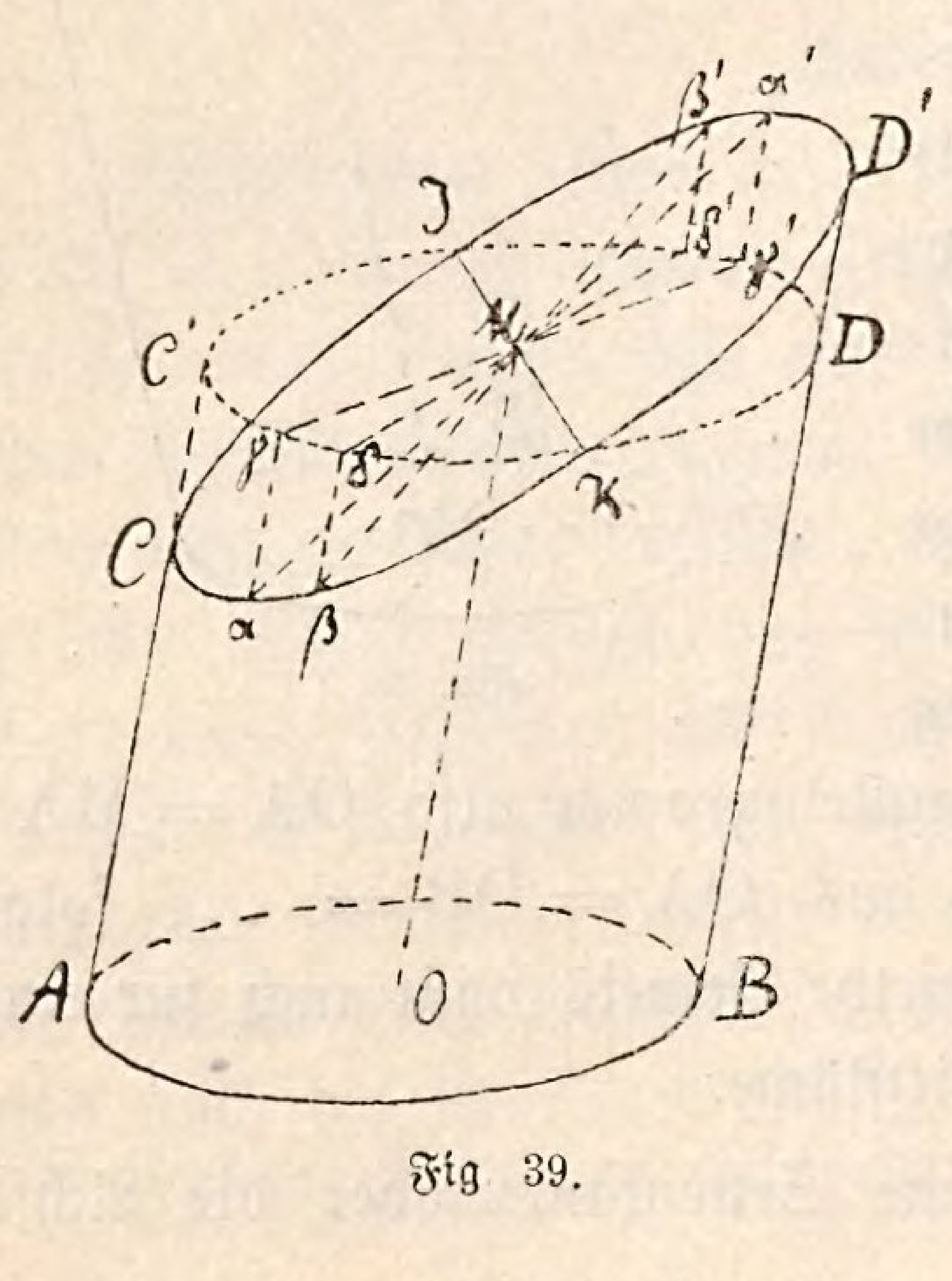


Fig 39.

a. Lehrsatz. Die Mantelfläche eines abgeschrägten Kreiscylinders ist gleich der eines Cylinders mit paralleler Gegenfläche und gleicher Achse.

Beweis. Man lege durch den Endpunkt der Achse eine zur Grundfläche parallele Ebene

ID'KC', welche die Gegenfläche längs IK schneidet, und beweise die Gleichheit der Flächen IDD'K und ICC'K, indem man die Achsenschnitte $\alpha\gamma\alpha'\gamma'$ und $\beta\delta\beta'\delta'$ legt, welche ungemein schmale Streifen aus den Flächen ausschneiden, und die Kongruenz dieser Streifen nachweist.

Zusatz. Derselbe Satz gilt vom Mantel des Cylinderhufes.

b. **Lehrsatz.** Der Inhalt eines senkrechten abgeschrägten Kreiscylinders ist gleich dem eines Cylinders mit parallelen Gegenflächen von gleicher Achse.

Beweis. Verfährt man wie bei a, so läßt sich die Congruenz der Stücke ICC'K und IDD'K durch Ineinanderlegen beweisen.

Zusatz. Derselbe Satz gilt vom schiefen abgeschrägten Kreiscylinder und wird durch Gleichheit der ungemein kleinen Körperstücke $\alpha\beta\gamma\delta M$ und $\alpha'\gamma'\delta' M$ des vorigen Beweises bewiesen.

Zusatz. Derselbe Satz gilt vom Cylinderhufe.

37.

Mantelfläche des Cylinders.

Lehrsatz. Die Mantelfläche des geraden Kreiscylinders ist gleich dem Produkte aus dem Umfange der Grundfläche mal der Höhe des Cylinders.

$$M = U \, . \, h = 2 \, r \, \pi \, h.$$

Beweis. Man teile den Umfang der Basis in viele, ungemein kleine Teile und lege durch die Teilpunkte die Seitenkanten, so zerschneiden diese die Mantelfläche in Stücke, welche man als eben betrachten kann; da sie Rechtecke von gleicher Höhe sind, so ist ihre Summe gleich dem Produkt aus der Höhe mal der Summe der Grundlinien; letzterer nähert sich aber, wenn man die Anzahl der Teile immer größer macht, dem Umfang als Grenze.

Denkt man sich die Mantelfläche längs einer Seitenkante aufgeschnitten, so kann sie, ohne daß einzelne Teile derselben gedehnt werden müssen, in eine Ebene ausgebreitet werden; die Cylinderfläche ist also abwickelbar, developpabel.

Zusatz. Die Mantelfläche jedes geraden Cylinders ist gleich dem Produkte aus Umfang mal Höhe. Beweis ebenso.

Zusatz 2. Die Mantelfläche eines geraden abgeschrägten Kreiscylinders, oder eines Hufes ist gleich dem Produkt aus Umfang mal Achse.

Inhalt des Cylinders.

Lehrsatz. Der Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Produkt aus Grundfläche mal Höhe.

Beweis: Ein eingeschriebenes Prisma ist gleich dem Produkt aus Grundfläche mal Höhe. Durch Vergrößerung der Seitenzahl des Prismas nähert sich das Prisma dem Cylinder, seine Grundfläche der des Cylinders als Grenze.

Zusatz. Der Inhalt eines abgeschrägten senkrechten Kreiscylinders, sowie des Hufes ist gleich dem Produkt aus Grundfläche mal Achse.

Ähnliche Cylinder. Zwei senkrechte Kreiscylinder sind ähnlich, wenn sich die Radien ihrer Grundkreise verhalten, wie ihre Höhen. Analog 27.

Die Inhalte ähnlicher Cylinder verhalten sich wie die Kuben ihrer Höhen oder ihrer Radien. Wie 28 a.

Die Mäntel ähnlicher Cylinder verhalten sich wie die Quadrate ihrer Höhen oder ihrer Radien. Wie 28 b.

38.

Cylinderdreiecke.

Bedeutet BB'CC' den vierten Teil eines Cylindermantels, dessen Achse AA', so daß AB $\perp$ AC, und schneidet man diesen Cylinderquadrant durch die Ebene ABC', so nennt man den Teil CC'B ein Cylinderdreieck erster Art und den Teil BB'C ein Cy-

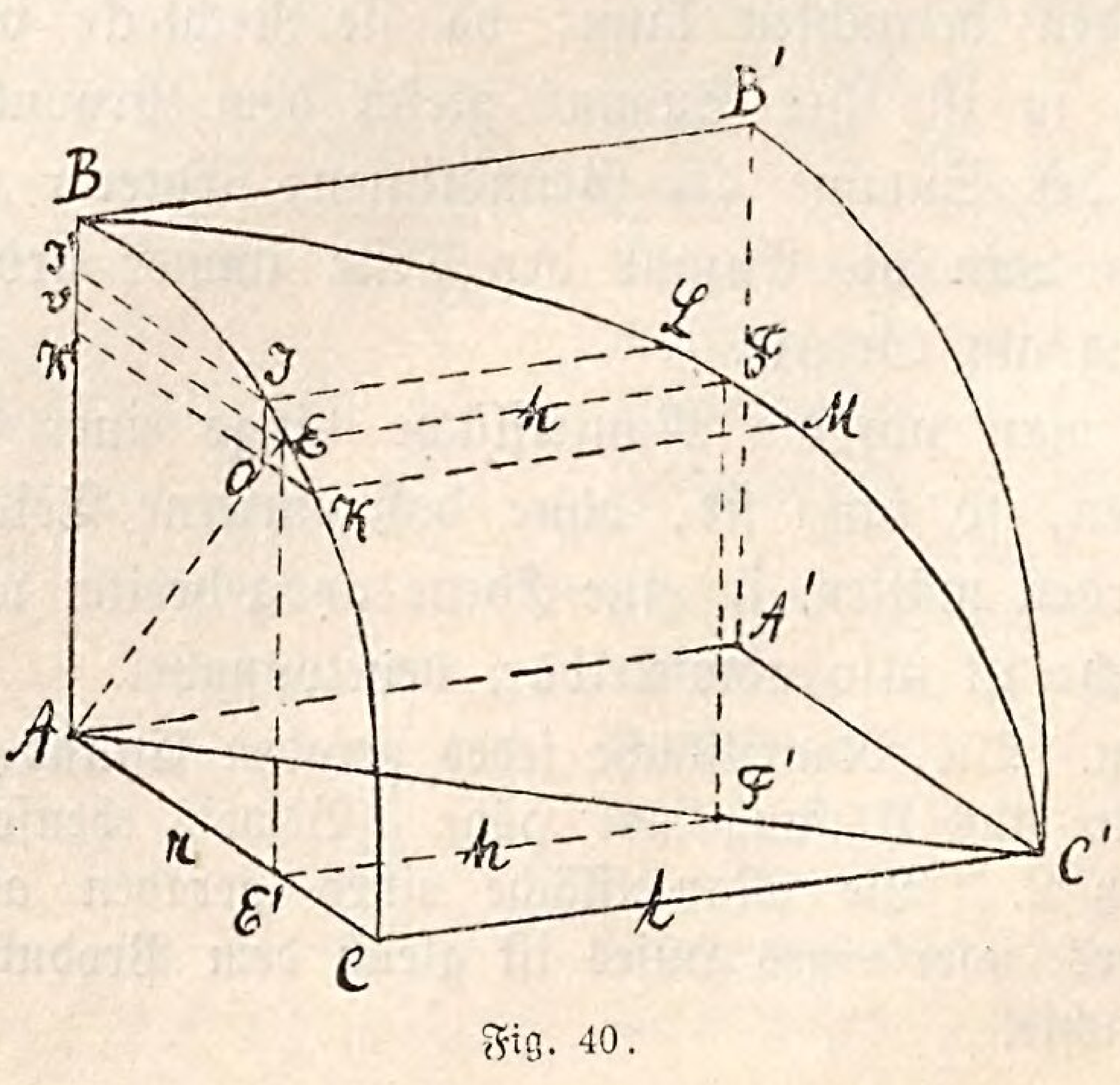


Fig. 40.

linderdreieck zweiter Art. Dabei sind $\triangle ACC'$ und $\triangle AA'C'$ Projektionen der Cylinderdreiecke und werden ihre Grundrisse genannt.

Lehrsatz. Das Cylinderdreieck erster Art ist doppelt so groß als sein Grundriß, das Cylinderdreieck zweiter Art ist $(\pi - 2)$mal so groß als sein Grundriß.

Beweis: Man zerschneide das Cylinderdreieck erster Art parallel CC' in ungemein schmale Streifen, welche man als Trapeze ansehen kann. Ihre Höhen, z. B. $IK = b$ projiciere man auf AB und nenne $I'K' = v$; ihre mittlere Länge $EF = h$ projiciere man auf Eb ACC', so ist $E'F' = EF = h$. Es ist dann

$$IKLM = b \,.\, h.$$

Zieht man noch $IO \perp KK'$ und AE, so ist

$\triangle IOK \sim \triangle AEE'$, also

$b : v = r : AE'$; da $E'F' \# CC'$, so ist auch

$AC : AE' = CC' : E'F'$, also

$r : AE' = l : h$; durch Vergleichung

$b : v = l : h$, woraus $b \,.\, h = v \,.\, l$.

Durch Addition sämmtlicher Streifen $b \,.\, h$ erhält man das Cylinderdreieck CBC'; durch Addition sämmtlicher $v \,.\, l$ erhält man $l \,.\, \Sigma v = l \,.\, AB = l \,.\, r = AB\, A'B' = AC\, A'C' = 2 \,.\, \triangle ACC'$.

Also Cylinderdreieck $CBC' = 2 \,.\, \triangle ACC' = r \,.\, l$.

Da $CC'BB' = \frac{1}{4} \,.\, 2r\pi \,.\, l = \frac{1}{2} r\pi l$, so hat man durch Subtraktion:

$$\text{Cyl.-Dreieck } BB'C' = \frac{1}{2} r\pi l - 2 \,.\, \frac{1}{2} rl = \frac{1}{2} rl\,(\pi - 2)$$
$$= (\pi - 2) \,.\, \triangle AA'C'.$$

Zusatz: Derselbe Satz gilt, wenn auch Eb. ABC und $A'B'C'$ nicht $\perp CC'$ stehen. Beweis durch Zerlegung in rechtwinkelige Cylinderdreiecke.

III. Aufgaben.

1. Man berechne Mantel, Oberfläche und Inhalt eines Cylinders, dessen Grundradius $r = 5$ dm und Höhe $h = 17$ dm ist, oder dessen Umfang 24,6 cm und Höhe = 13,9 cm.

2. Was wiegt ein Kupferdraht von $1^1/_2$ mm Dicke und 12,7 km Länge bei 8,8 sp. G.?

3. Wie dick ist ein Platindraht, von welchem 9,45 m Länge 7,53 g wiegen? sp. G. = 22.

4. Wie viel m Eisendraht von 3,4 mm Dicke gehen auf ein Pfund? sp. G. 7,6.

5. Wie dick sind eiserne Turnstäbe von 1 m Länge bei 6 ℔, 8 ℔, 10 ℔ Gewicht? sp. G. = 7,6.

6. In einem cylindrischen Gefäß von 17 cm innerer Weite befindet sich Wasser; um wie viel steigt das Niveau desselben durch Zugießen von 1 l Wasser oder durch Versenken eines 9,34 kg schweren Eisenstückes von 7,8 sp. G., und wie groß ist das Volumen eines Körpers, etwa einer Hand, wenn durch Eintauchen derselben das Niveau um 23,4 mm steigt?

7. Was wiegt ein cylindrischer Baumstamm von $r = 84$ cm, $l = 6{,}27$ m, sp. G. = 0,72; wie groß ist der Abfall, wenn er quadratisch zubehauen wird?

8. Wie groß ist der Inhalt eines Hohlcylinders von 2,94 m Länge, wenn der äußere Durchmesser 62 cm, der innere 44 cm ist?

9. Was wiegt der laufende Meter Messingrohr von 8 cm lichter Weite und 0,8 mm Metallstärke. sp. G. 8,6.

10. Wie viel m Bleirohr dürfen auf einen Eisenbahnwagen von 200 Ctr Tragkraft verladen werden, wenn der äußere Durchmesser des Rohres 4,6 cm, die Metalldicke 2,7 mm und das sp. G. 11,4 ist.

11. Wie dick ist die Wand einer Eisenröhre, welche bei 22 cm innerer Weite und 1,48 m Länge 126,4 kg wiegt? sp. G. 7,5.

12. Ein Hohlcylinder hat 16 cm innere Weite, 2 cm Wanddicke und 20 cm Höhe; wie dick muß ein anderer Cylinder von gleicher (oder von 25 cm) Höhe sein, wenn er denselben Inhalt haben soll, wie der Hohlcylinder?

13. Ein Steincylinder von 15,8 cm Durchmesser soll der Länge nach cylindrisch durchbohrt, und die Durchbohrung soll mit Blei ausgegossen werden, so daß das Ganze nun doppelt so viel wiegt, als zuerst der Steincylinder; wie dick muß die Bohrung sein, wenn das sp. G. des Steines = 2,6, das des Bleies = 11,2 ist?

14. Ein auf beiden Seiten offenes Tonnengewölbe (halber Hohlcylinder) hat einen Durchmesser im Lichten = d, eine Mauerdicke = δ und eine Länge = l; wie groß ist die innere Gewölbfläche und der Kubikinhalt des Mauerwerkes. Man beweise

die Richtigkeit der Handwerkerregel, daß erstere $= \frac{\pi}{2}$. Grundriß, letzterer = (Mauer-)Dicke mal mittlere Gewölbfläche ist. Bemerke, daß letzteres auch für den ganzen Hohlcylinder gilt.

15. Der Inhalt eines Cylinders, welcher ebenso hoch als breit ist, ist 6,28 cbm; wie groß sind seine Dimensionen und wie ändern sich beide, wenn der Inhalt auf 8,37 cbm vergrößert wird?

16. Es soll ein oben offenes cylindrisches Blechgefäß gemacht werden, welches 25 l (50 ℔ Spiritus vom sp. G. 0,82) faßt, und dessen Höhe $1^1/_2$ mal so groß sein soll als seine Breite (sich zur Breite wie 2 : 3 verhalten soll). Welches sind seine Dimensionen, welche Form und Fläche hat der Mantel?

17. Ein Rechteck von 0,3 m Länge und 0,4 m Breite (a Länge, b Breite) wird zum Cylinder umgerollt; wie groß ist der Inhalt, je nachdem die eine oder die andere Seite des Rechteckes als Seitenkante benützt wird; wie verhalten sich die Inhalte?

18. Ein Cylinder, dessen Durchmesser sich zur Höhe verhält, wie m : n, hat eine Mantelfläche = M; wie groß ist sein Inhalt?

19. Aus dem Inhalt I und der Mantelfläche M soll man Grundradius und Höhe berechnen.

20. Ein Cylinder hat 533,8 qm Oberfläche; sein Achsenschnitt ist ein Rechteck von 44 cm Umfang; wie groß sind seine Dimensionen?

21. Von zwei cylindrischen ähnlichen Gefäßen hat das eine den Inhalt i (1 l) das andere I (10 l), wie verhalten sich die Höhen, die Radien, die Oberflächen?

22. Von zwei ähnlichen Cylindern hat der eine einen n mal größeren Mantel; wie viel mal ist seine Höhe, sein Inhalt größer als der des anderen?

23. Bei einem Cylinder von 80 l Inhalt ist die Höhe gleich dem Umfange des Grundkreises; wie groß ist die Mantelfläche und die Oberfläche?

24. Ein cylindrischer Kupferstab, dessen Länge l = 1 m,

Durchmesser d = 2 cm, sp. G. s = 8,88, soll so mit einer concentrischen Korkschichte vom sp. G. 0,24 umgeben werden, daß er im Wasser ganz von Wasser bedeckt schwimmt. Welches ist die Dicke und das Gewicht des hohen Korkcylinders?

25. In eine senkrechte quadratische Pyramide, deren Grundkante = a, Seitenkante = 2a, wird ein Cylinder, welcher ebenso hoch als breit ist, so gestellt, daß seine Grundfläche in der der Pyramide liegt, seine obere Fläche aber die Seitenflächen der Pyramide berührt; welches sind seine Dimensionen?

26. In eine dreiseitige reguläre Pyramide von lauter gleichen Kanten a wird ein Cylinder, welcher halb so hoch als breit ist, ebenso gestellt; wie groß sind seine Dimensionen?

27. Ein schief abgeschnittener Cylinder hat 12 cm Durchmesser und 18,4 cm und 13,8 cm als größte, beziehungsweise kleinste Seitenlänge, wie groß ist Inhalt und Mantelfläche? (Siehe Schlußbemerkung.)

28. Ein Cylinder von 34 cm Radius ist durch eine Ebene, welche unter 45° gegen die Grundfläche geneigt ist, schief abgeschnitten und zwar beginnt der Schnitt in einer Höhe von 12 cm; wie groß ist Inhalt und Mantelfläche?

29. Ein Hohlcylinder von 60 cm äußerem und 42 cm innerem Durchmesser hat 18 cm und 52 cm als größte bezüglich kleinste äußere Seitenkante. Wie groß ist sein Inhalt, die innere und die äußere Mantelfläche und die größte und kleinste innere Kante?

30. Ein Tonnengewölbe hat 4,82 m inneren Durchmesser, 0,6 m Mauerstärke und 12,2 m und 17,94 m als größte und kleinste innere Kante; wie groß ist die innere Gewölbfläche und der Kubikinhalt des Mauerwerks?

31. Ein Cylinder von 38 cm Durchmesser ist an einem Ende senkrecht, am anderen unter 30° abgeschnitten; an letztere Schnittfläche ist ein ebenso dicker Cylinder auch mit der Schnittfläche von 30° Neigung angesetzt und am anderen Ende senkrecht abgeschnitten. Die kürzesten Seitenkanten dieser Cylinder sind 22 cm resp. 47 cm; wie groß ist die Summe ihrer Mäntel und ihrer Inhalte?

32. Ein Cylinderhuf hat 9 dm Durchmesser und 4 dm größte Seitenkante; wie groß ist Mantel und Inhalt?

33. Bei einem Cylinderhuf von 37 cm Durchmesser mißt man zwei in einem Durchmesser gegenüberstehende Kanten als 6 cm und 22 cm, wie groß ist Mantel, Inhalt und größte Seitenkante?

34. Aus einem Cylinder ist ein Stück (Doppelhuf) ausgeschnitten, indem durch denselben Punkt des Mantels eine Ebene unter 30^0 nach aufwärts und eine unter 45^0 nach abwärts gelegt (die Ebenen gehen auch durch dieselbe Tangente, die in diesem Punkt an den senkrechten Querschnitt gelegt ist). Die größte Kante mißt 50 cm; wie groß ist Radius, Mantel und Inhalt des Körpers?

Schlußbemerkung. Die schräge Schnittfläche eines Kreiscylinders ist eine Ellipse; ihr größter Durchmesser (große Achse) verbindet die Endpunkte der größten und kleinsten Seitenkante (Übungssatz **36**), ihr kleinster Durchmesser (kleine Achse) steht auf dem größten senkrecht. Bezeichnet a die Länge der halben großen, b die der halben kleinen Achse, so ist die Fläche der Ellipse $= a b \pi$. Man berechne damit auch die Flächen der in den Aufgaben vorkommenden schiefen Cylinderschnitte.

39.

Kegel.

Erklärung. Verbindet man alle Punkte einer geschlossenen krummen Linie (Leitlinie oder Grundlinie) mit einem außerhalb derselben gelegenen Punkte, so erfüllen diese Geraden (Erzeugenden oder Seitenlinien oder Kanten) eine Kegelfläche. Der gemeinsame Punkt der Seitenlinien heißt Spitze.

Ist die Grundlinie ein Kreis und die Spitze außerhalb der Ebene des Kreises, so entsteht eine Kreiskegelfläche; liegt die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt des Grundkreises, so heißt die Kegelfläche senkrecht oder gerade.

Schneidet man eine Kegelfläche durch eine Ebene, so daß die Schnittfigur eine geschlossene Linie bildet, so heißt der von dieser Ebene und der Kegelfläche begrenzte Raum ein Kegel,

wobei für Kreiskegel und senkrechte Kreiskegel analoge Erklärungen gelten wie für die Kegelfläche.

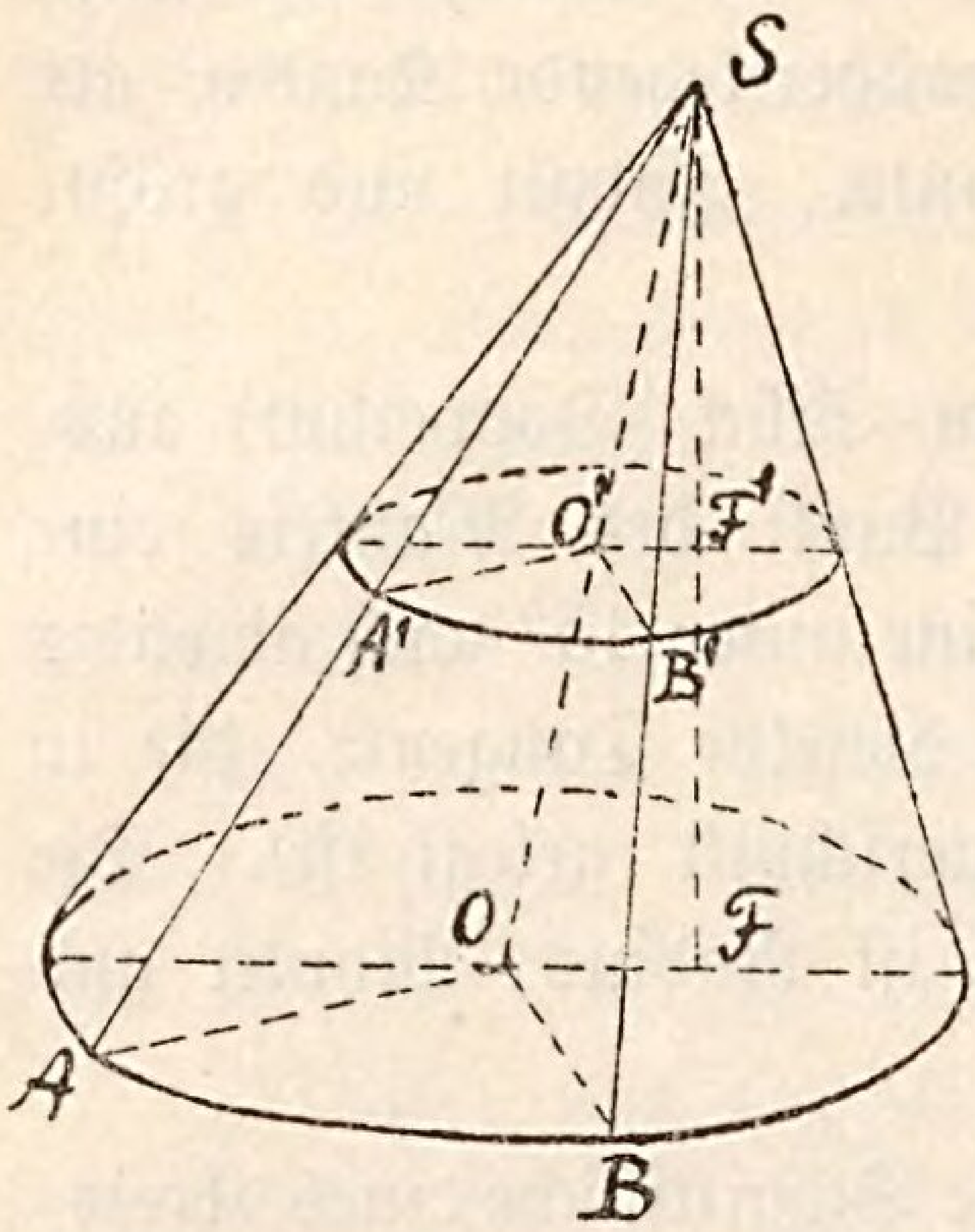


Fig. 41.

Die Verbindungslinie des Mittelpunktes des Grundkreises mit der Spitze heißt Achse.

Lehrsatz. Im Kreiskegel ist jeder zur Grundfläche parallele Schnitt ein Kreis.

Beweis. Man legt beliebige Achsenschnitte und beweist aus der Aehnlichkeit der Dreiecke, daß

$OA : O'A' = OS : O'S = OB : O'B'$, da $OA = OB$, so folgt $O'A' = O'B'$.

Man bemerke auch, daß

$OA : O'A' = SA : SA' = H : h$, daß ferner, wenn G und g die Flächen der Kreise sind:

$$G : g = OA^2 : O'A'^2$$
$$= SO^2 : SO'^2$$
$$= H^2 : h^2.$$

Zusatz 1. Derselbe Satz gilt für jeden Kegel. Man beweist, daß die von entsprechenden Punkten der zwei krummen Linien unter gleichen Winkeln gezogenen Transversalen stets in demselben Verhältnisse stehen, indem man durch eine beliebige Seitenkante alle möglichen Ebenen legt; dieser Nachweis genügt für die Aehnlichkeit der Figuren.

Zusatz 2. Irgend zwei parallele Ebenen schneiden die Kegelfläche in ähnlichen Figuren.

Zusatz 3. Der Kegel kann verglichen werden mit einer Pyramide, deren Grundfläche ein Vieleck, von unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten ist.

Zusatz 4. Verlängert man die Seitenlinien des Kegels über die Spitze hinaus, so entsteht eine Scheitelkegelfläche, welche im allgemeinen symmetrisch ist zur gegebenen; beide Kegelflächen können im allgemeinen nicht zur Deckung gebracht werden, ob-

gleich alle die Form bestimmenden Elemente dieselben sind, da deren Aufeinanderfolge eine entgegengesetzte ist.

40.

Mantel des Kegels.

Derjenige Teil einer Kegelfläche, welcher zwischen der Grundfläche des Kegels und der Spitze liegt, heißt der **Kegelmantel**.

Lehrsatz. Beim senkrechten Kreiskegel ist die Fläche des Mantels gleich der eines Dreieckes, das den Umfang des Grundkreises als Grundlinie und die Seitenlinie als Höhe hat. Es ist also

$$M = \frac{1}{2} \cdot 2 r \pi \cdot s = r \pi s.$$

Beweis. Man zerlegt den Mantel in ungemein viele ungemein kleine Dreiecke, indem man den Umfang des Grundkreises in kleinste Teile zerlegt und durch die Teilpunkte die Seitenlinien zieht; die Teile des Mantels können dann als gleichschenklige Dreiecke angesehen werden, welche die Seitenlinie als Höhe haben; Addition derselben gibt das Gesuchte.

Zusatz. Jede Kegelfläche kann ohne Dehnung einzelner Teile in eine Ebene ausgebreitet werden; ist also eine abwickelbare Fläche.

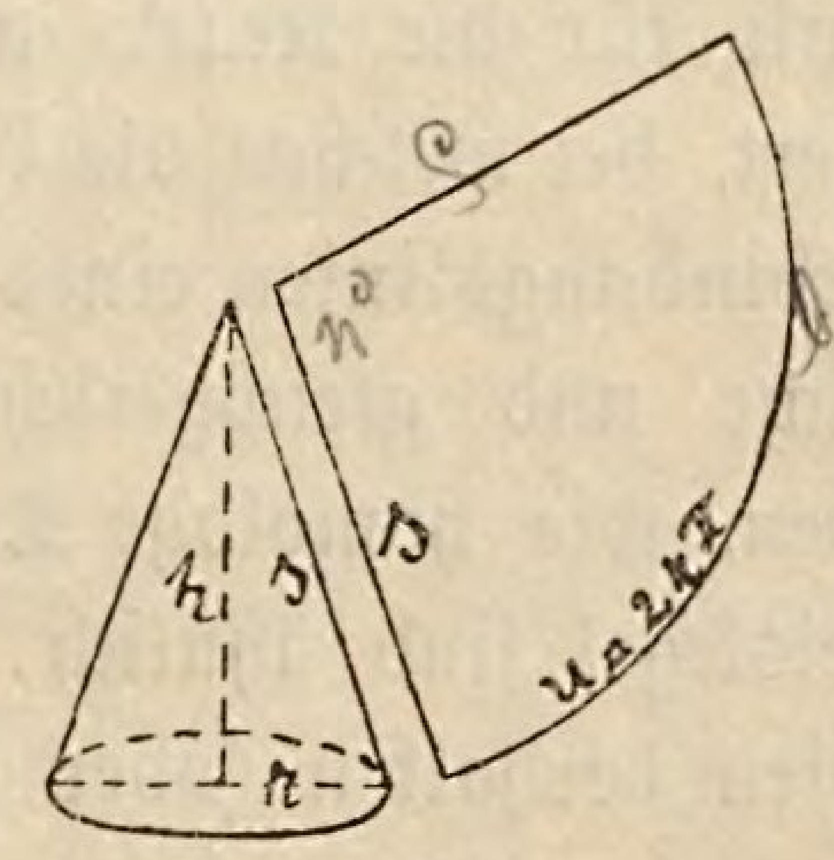


Fig. 42.

Der Mantel eines geraden Kreiskegels gibt, längs einer Seitenkante getrennt und abgewickelt einen Kreissektor, dessen Bogenlänge b gleich dem Umfang des Grundkreises, und dessen Radius ρ gleich der Seitenlinie s ist. Da die Fläche eines Sektors $= \frac{1}{2} b \cdot \rho$, so hat man auch hieraus $M = \frac{1}{2} 2 r \pi \cdot s = r \pi s$.

Bezeichnet man den Centriwinkel dieses Kreissektors mit n^0, so hat man:

$$b = \frac{2 \rho \pi \cdot n}{360} \text{ und } b = 2 r \pi, \text{ also durch Gleichsetzen}$$

$$\frac{s\,n}{360} = r \text{ woraus } n = \frac{r \,.\, 360}{s} \text{ oder}$$

$$r : s = n^0 : 360^0 \text{ folgt.}$$

Lehrsatz zur Uebung: Beim schiefen Kreiskegel liegt die größte und die kleinste Seitenkante in der durch Achse und Höhe bestimmten Ebene.

41.

Inhalt des Kegels.

Lehrsatz. Der Inhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Teil des Produktes aus Grundfläche mal Höhe.

$$I = \frac{1}{3} G \,.\, h$$

Beim Kreiskegel ist

$$I = \frac{1}{3} r^2 \pi h.$$

Der Beweis folgt aus dem Vergleich mit einer Pyramide, welche sich dem Kegel bei Vergrößerung der Seitenzahl dann nähert, wenn sich die Grundfläche der Pyramide der des Kegels nähert.

Die Sätze von 32, 1 bis 6 über die Pyramiden gelten ebenso für die Kegel, wenn man als ähnliche Kegel solche definiert, bei welchen die Grundflächen ähnliche Figuren, homologe Verbindungslinien eines Punktes der Grundfläche mit der Spitze gleiche und gleichgerichtete Neigung und dasselbe Verhältnis haben, wie homologe Transversalen der Grundflächen. Gerade Kreiskegel sind ähnlich, wenn sich die Höhen wie die Grundradien verhalten (oder wie die Seitenlinien).

42.

Abgestutzter Kegel.

Erklärung. Der zwischen der Grundfläche und einer parallelen Schnittfläche liegende Teil eines Kegels heißt ein abgestutzter Kegel oder ein Kegelstumpf.

Bezeichnet man beim geraden Kreiskegel mit R und r die Radien der Gegenflächen, mit s die Länge der Seitenkante, mit h den Abstand der Gegenflächen, so ist der Mantel

$$M = s\pi (R + r).$$

Denn ist s' die Seitenkante des Ergänzungskegels, so hat man nach 40
$M = (s + s')\pi R - s'\pi r$ und
$s + s' : s' = R : r$, woraus sich durch Elimination von s' die Formel ergibt.

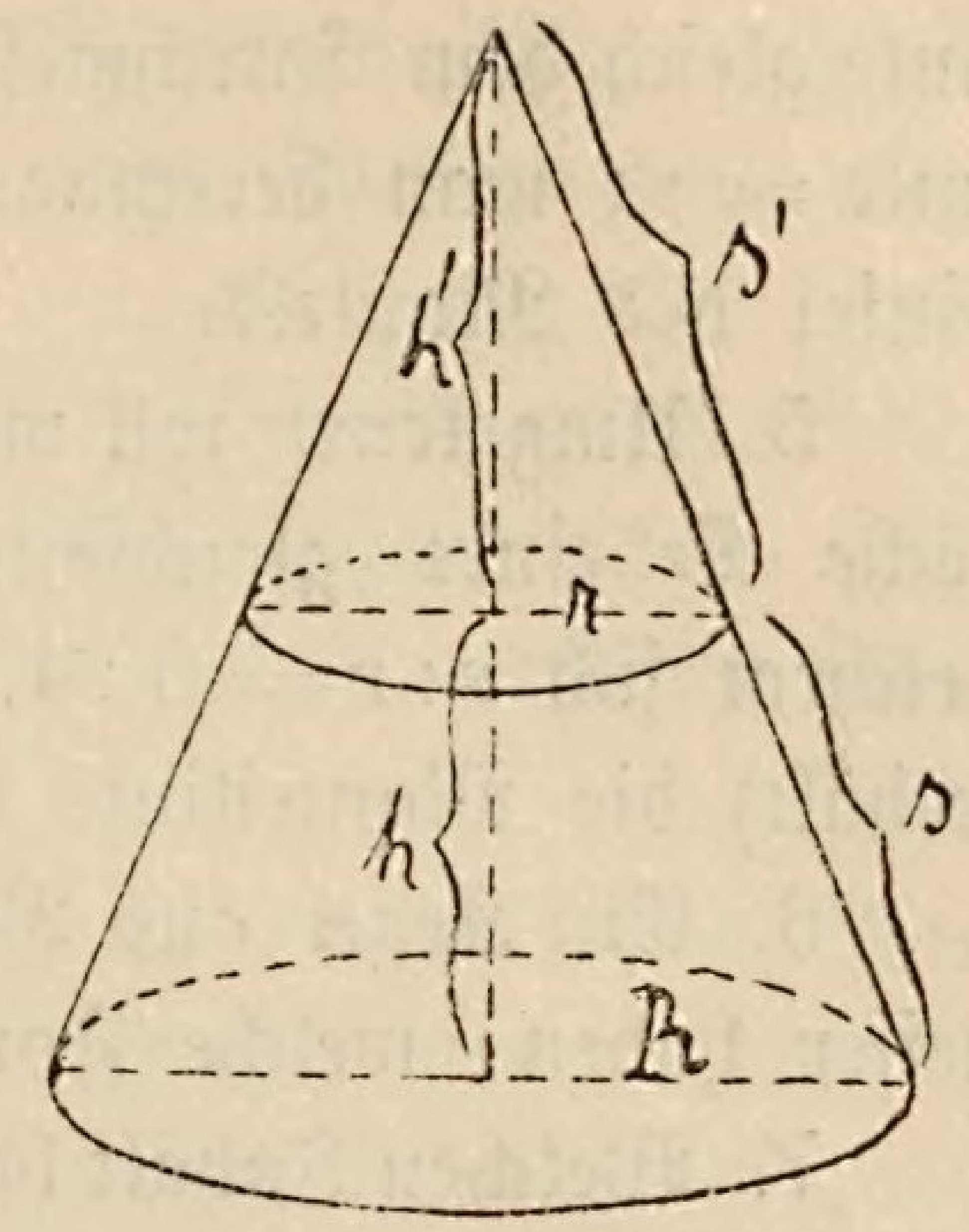


Fig. 43.

Der Inhalt des Kegelstumpfes ist (auch beim schiefen)

$$I = \frac{h\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

Man leitet dies entweder aus der Formel 33 ab, oder setze, indem man mit h' die Höhe des Ergänzungskegels bezeichnet,

$$I = \frac{1}{3}R^2\pi(h + h') - \frac{1}{3}r^2\pi h' \text{ und}$$

$h + h' : h' = R : r$ und eliminiere h' wie in 33.

Der Mantel eines Kegelstumpfes erscheint abgewickelt als Sektor eines Kreisringes, dessen Radien $s + s' = \frac{Rs}{R - r}$ und $s' = \frac{rs}{R - r}$, dessen Bögen $B = 2R\pi$, $b = 2r\pi$ sind und dessen Centriwinkel n^0 aus $n : 360 = R : s + s'$ (40), also aus $n : 360 = R - r : s$ gefunden wird.

IV. Aufgaben.

1. Berechne Mantel, Oberfläche und Inhalt eines Kegels, von welchem gegeben sind: a) $r = 7{,}239$, $h = 9{,}428$; b) $r = 0{,}6274$, $s = 0{,}9483$; c) $h = 127{,}4$, $s = 142{,}53$; d) der Umfang des Grundkreises $u = 273{,}6$, $s = 66{,}53$.

2. Berechne Oberfläche und Inhalt eines Kegels, α) dessen Radius $= r$ und dessen Mantellinie das $1^1/_2$fache des Durchmessers ist, β) dessen Höhe sich zum Grundradius r wie $5 : 3$ verhält, γ) dessen Mantellinie s das Doppelte der Höhe ist.

3. Aus der Mantelfläche M eines Kegels, dessen Höhe doppelt (ebenso, $1^1/_2$) mal so groß ist als sein Durchmesser, soll man den Inhalt berechnen.

4. Von einem gleichseitigen Kegel (bei welchem die Seiten-

kante gleich dem Durchmesser des Grundkreises ist) ist die Seitenkante = s; man berechne Mantelfl. Oberfl. Inhalt und Centriwinkel des Mantels.

5. Umgekehrt soll man aus dem Inhalt J oder der Oberfläche O eines gleichseitigen Kegels (oder eines solchen, bei welchem sich $s : r = 5 : 4$, oder $s : h = 3 : 2$ oder $r : h = 2 : 5$ verhält) die Mantellinie berechnen.

6. Ein Kegel aus Blech soll 4 l fassen und 22 cm Durchmesser haben; welche Form hat der abgewickelte Mantel?

7. Welchen Inhalt hat ein Kegel, welcher durch Aufwickelung eines Kreissektors vom Radius $\rho = 28{,}4$ cm und $n = 135^0$ entsteht? Man drücke J durch ρ und n aus.

8. Der abgewickelte Mantel eines Kegels ist ein Quadrant (Sextant, Oktant, hat $n = 217^0$) von 12,42 qdm Fläche; wie groß sind die Dimensionen und der Inhalt?

9. Die Oberfläche eines Kegels ist 8,427 qdm, der Centriwinkel des abgewickelten Mantels $= 72^0$; wie groß ist der Inhalt des Kegels?

10. Aus der Oberfläche = 65,949 cm und der Seitenlinie = 4 cm soll man den Grundradius berechnen.

11. Der Grundradius eines Kegels soll $r = 5$ cm und der Centriwinkel des abgewickelten Mantels soll $n = 270^0$ sein; man berechne Seitenlinie, Inhalt und das Verhältnis des Mantels zur Grundfläche.

12. Der Inhalt eines Kegels ist J, sein Mantel beträgt $^3/_4$ von der Oberfläche; wie groß ist r, s, h?

13. Ein Kegel soll durch eine zur Basis parallele Ebene in zwei gleiche Teile (im Verhältnis $m : n$) geteilt werden; in welchem Abstand von der Spitze ist der Schnitt zu führen?

14. Auf einen Cylinder, welcher ebenso hoch als breit ist, wird ein gleichseitiger Kegel von derselben Breite gestellt. Beide Körper haben zusammen 18 cdm Inhalt. Wie groß sind die Dimensionen jedes Körpers, und die ganze äußere Oberfläche?

15. Von einem gleichseitigen Kegel von der Höhe h soll man durch eine der Basis parallele Ebene oben ein Stück vom Inhalte k (dessen Oberfläche = o) abschneiden; in welchem Abstand von der Spitze muß das geschehen?

16. Von einem Kegel mit dem Radius 12 cm und der Höhe 32 cm soll ebenso ein Stück vom Inhalt 0,5 l abgeschnitten werden.

17. Ein Kegel von der Höhe h = 17 cm wiegt 700 g, wo muß ich ihn abschneiden, damit der abgeschnittene Kegel 500 g wiegt, und in welchem Verhältnis stehen dann die Oberflächen beider Körper?

18. In einen Kegel, dessen Höhe = h und dessen Mantellinie = $1^1/_2$ h (unter 30^0 gegen die Grundfläche geneigt ist) wird ein Cylinder, welcher halb so hoch (eben so hoch) als breit ist, so gestellt, daß seine Grundfläche in der des Kegels und der Umfang seiner Deckfläche im Kegelmantel liegt; welche Dimensionen hat der Cylinder und wie groß ist der Unterschied der Inhalte beider Körper?

19. Ein rechtwinkeliges Dreieck von den Katheten a = 2,4 m, b = 5 m dreht sich um die eine, dann um die andere Kathete als Achse und beschreibt dadurch Kegel; man gebe die Inhalte und deren Verhältnis an.

20. Dasselbe Dreieck dreht sich um die Hypotenuse. Welchen Inhalt und welche Oberfläche hat der so entstandene Doppelkegel.

21. Ein schiefwinkliges Dreieck von den Seiten a, b, c dreht sich um je eine Seite, man bestimme die Volumina der so entstandenen Rotationskörper und deren Verhältniß.

22. Wie verhält sich der Inhalt des gleichseitigen Kegels zu dem des einbeschriebenen Würfels.

23. Einem rechtwinkligen Parallelepided von den Kanten a, b, c ist ein gleichseitiger Kegel umschrieben; man berechne dessen Dimensionen und Inhalt.

24. Um (in) ein Tetraeder wird ein Kegel, um (in) ein Oktaeder ein Doppelkegel gelegt, man bestimme ihre Inhalte aus der Seitenkante a dieser Polyeder und gebe die Form der abgewickelten Mäntel an.

25. Ein reguläres Sechseck von der Seite a wird um eine Verbindungslinie gegenüberliegender Ecken gedreht; wie groß ist Oberfläche und Inhalt des entstandenen Rotationskörpers?

26. Die Achse eines schiefen Kreiskegels ist a = 7 m, die größte Seitenkante ist b = 12 m, die kleinste c = 8 m; wie groß ist der Grundradius und der Inhalt?

27. Bei einem schiefen Kreiskegel ist der Grundradius R = 25,5, die längste Seitenlinie S = 58, die kleinste s = 41; wie groß ist Inhalt und Achse?

Abgestutzter Kegel.

28. Man berechne Mantelfläche, Oberfläche und Inhalt eines abgestutzten Kegels, bei welchem die Radien der Grund- und Deckfläche 9 cm und 5 cm, die Höhe 6 cm beträgt.

29. Bei einem Baumstamm von der Form eines abgestutzten Kegels mißt der untere Umfang 1,76 m, der obere 1,3 m, die Länge 13,2 m; wie groß ist das Volumen?

30. Ein oben offenes Blechgefäß von der Form eines abgestutzten Kegels hat oben 0,8 m, unten 1,5 m Durchmesser und soll 3 hl fassen; wie lang ist seine Mantellinie, die Mantel- und Grundfläche und wie muß der Mantel geschnitten werden?

31. Ein abgestutzter Kegel von der Oberfläche O hat als Radius der Grundfläche das Doppelte, als Mantellinie das Dreifache vom Radius der Deckfläche; wie groß ist Höhe und Kubikinhalt?

32. Aus der Mantelfläche = 290 qm, der Mantellinie = 9 m und der Höhe = 8 m soll man die Radien der Gegenflächen eines abgest. Kegels berechnen.

33. Aus dem Inhalt = 45 l, der Höhe = 0,6 m und dem Radius der Deckfläche = 0,12 m soll man die Mantelfläche des abgest. Kegels berechnen.

34. Ein Baumstamm hat die Form eines abgestutzten Kegels, dessen größerer Radius = R; er bekommt denselben Inhalt, wenn man ihn in Form einer abgestutzten quadratischen Pyramide behaut, oder in Form eines Cylinders, der die kleinere Fläche als Grundfläche hat. Wie groß ist der Radius der kleineren Fläche?

35. Berechnet man den Inhalt eines abgestutzten Kegels (Baumstammes) als den eines gleichhohen Cylinders, dessen Radius gleich dem arithmetischen Mittel der Kegelradien ist, so findet

man den Inhalt zu klein; in welchem Verhältnis müssen die Kegelradien stehen, damit der Fehler dieser abgekürzten Berechnungsart kleiner ist als 5%?

36. In einem abgestutzten Kegel von den Radien R, r und der Höhe h errichte man über der Grundfläche und unter der Deckfläche je einen Kegel, deren gemeinsame Spitze zwischen den beiden Grenzkreisen liegt. Man wähle den Punkt so, daß die Summe dieser beiden Kegel gleich der Hälfte des abgestutzten Kegels ist, und untersuche, welches Verhältnis zwischen R und r bestehen muß, damit dies möglich ist.

37. Wie groß ist die Oberfläche eines Kegelstumpfes von 11 Inhalt, wenn die Größen R, r, h sich wie 10 : 3 : 7 erhalten; wie vielmal ist die Oberfläche größer bei einem ähnlichen Kegelstumpf von 21, 101 Inhalt?

38. Die Hälfte eines Kreisringes von den Radien R und r wird zum Kegelstumpf umgebogen; wie groß ist dessen Inhalt?

39. Aus einem Kreisring von den Radien 25 cm und 15 cm wird ein Ausschnitt von 150° gemacht, so daß ein Ausschnitt von 210° übrig bleibt. Jeder Ausschnitt wird zu einem abgestutzten Kegel umgebogen; man berechne deren Volumina.

40. Ueber einem Grundkreis von 50 qm Fläche soll ein abgestutzter Kegel von 12 m Höhe errichtet werden, dessen oberer Radius $^3/_5$ vom unteren ist; wie groß wird der Inhalt?

41. Welches sind die Dimensionen eines Kegel, welcher mit einem abgestutzten Kegel (R, r, h) gleichen Inhalt und gleiche Neigung der Seitenkanten hat?

42. Ein Kegel (Radius $= \rho$, Höhe $= h$) soll in einen inhaltsgleichen abgestutzten Kegel von halber Höhe und gleicher Neigung der Seitenkanten verwandelt werden; wie groß sind dessen Radien?

43. Ein gleichschenkliges Trapez (Antiparallelogramm) von den Seiten $a \# b$ und der Höhe h wird um eine in seiner Ebene liegende und zur Höhe parallele Gerade gedreht, welche vom nächsten Endpunkt der größeren Parallelen a den Abstand c (keinen Abstand) hat; man berechne Inhalt und Oberfläche des entstandenen Rotationskörpers.

44. Berechne dasselbe, wenn ein reguläres Sechseck (Zwölfeck) von der Seite a um eine seiner Seiten (oder um die Halbierungslinie zweier Gegenseiten) rotiert.

45. Berechne dasselbe, wenn ein Rhombus, dessen Seite = a = der kleineren Diagonale, um eine Achse gedreht wird, welche zur kleineren Diagonale parallel ist und durch eine Ecke geht.

46. Berechne dasselbe, wenn ein reguläres Sechseck, (Achteck) von der Seite a um eine Achse gedreht wird, welche zu einer Seite im Abstand b parallel ist.

47. Berechne dasselbe, wenn ein reguläres Fünfeck von der Seite a um eine Seite oder um die von einem Ecke auf die gegenüberliegende Seite gefällte Senkrechte rotiert.

Anhang III.

Die Guldin'sche Regel.

Wenn eine ebene Figur um eine in ihrer Ebene liegende, sie aber nicht schneidende Gerade gedreht wird, so beschreibt die ebene Figur einen Raum, welcher ein Ringkörper genannt wird; seine Oberfläche, welche vom Umfang der ebenen Figur beschrieben wird, heißt eine Ringfläche. Es ist dabei nicht ausgeschlossen, daß die Rotationsachse einen Teil des Umfanges der ebenen Figur enthält, wenn nur alle Teile der Figur auf derselben Seite der Rotationsachse liegen.

Für Oberfläche und Inhalt eines solchen Ringkörpers hat man folgende nach ihrem Erfinder benannte Guldin'sche Regeln.

a. Die Oberfläche des Ringkörpers ist gleich dem Produkt aus dem Umfang der erzeugenden ebenen Figur mal dem Umfang desjenigen Kreises, den der Schwerpunkt des erzeugenden Umfangs bei der Rotation beschreibt.

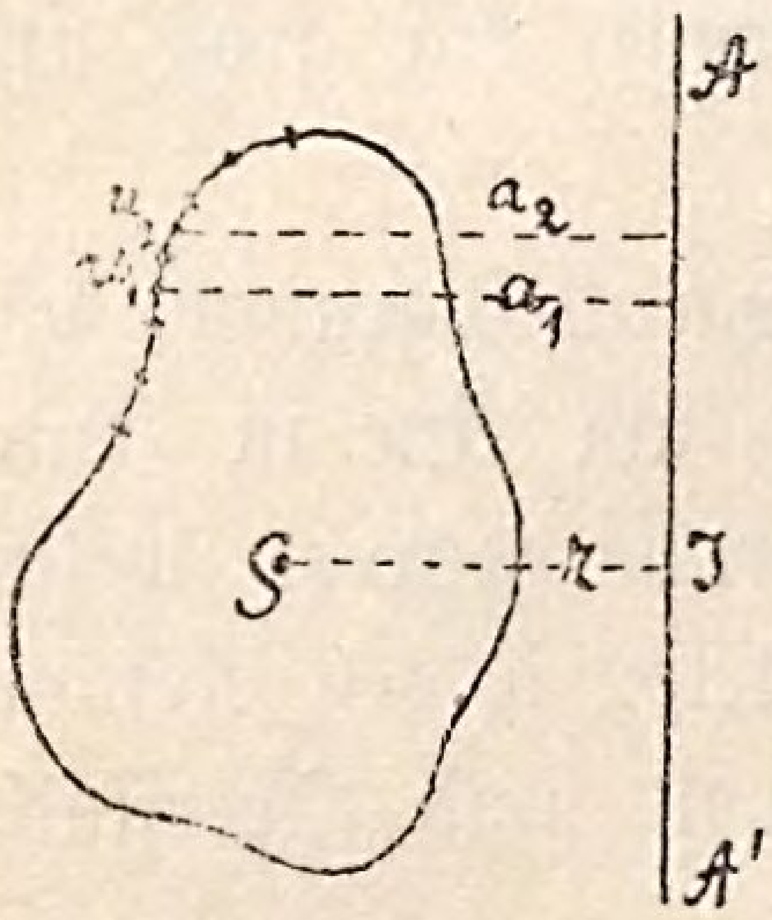


Fig. 44.

Beweis. Man teilt den Umfang U der erzeugenden Figur in ungemein viele, ungemein kleine Strecken u_1, u_2, ..., welche man wegen ihrer Kleinheit als gerade ansehen darf und bezeichnet die senkrechten Abstände ihrer Mittelpunkte vor der Rotationsachse AA' mit a_1, a_2, ... Jedes Stück des Umfanges beschreibt bei der Rotation den Mantel eines abgestutzten Kegels und die Summe dieser Mäntel ist mit Vernachlässigung eines verschwindend kleinen

Fehlers gleich der Oberfläche O des Ringes. Man hat also

$O = 2 a_1 \pi u_1 + 2 a_2 \pi u_2 + \ldots\ldots$ oder

$O = 2\pi (a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots\ldots)$

Setzt man nun die Summe $a_1 u_1 + a_2 u_2 \ldots\ldots = U . r$, so lehrt die Mechanik, daß hiebei r gleich dem Abstande SI des Schwerpunktes S des erzeugenden Umfanges von der Rotationsachse AA′ ist. Man hat also:

$$O = 2\pi . U . r = U . 2 r \pi,$$

was dem Wortlaut der Guldin'schen Regel entspricht.

b. Der Inhalt eines Ringkörpers ist gleich dem Produkt aus der Fläche der erzeugenden Figur mal dem Weg, welchen der Schwerpunkt dieser Fläche bei der Rotation macht.

Beweis. Man zerlege die erzeugende Fläche Q in ungemein viele, ungemein kleine Rechtecke $q_1, q_2, \ldots\ldots$, deren Seiten parallel resp. senkrecht zur Rotationsachse liegen und bezeichne die Abstände der Mittelpunkte dieser Rechtecke von der Achse mit a_1, $a_2 \ldots$ so beschreiben diese Rechtecke bei der Rotation Hohlcylinder, deren Summe gleich dem Inhalt R des Ringes ist. Der Inhalt jedes solchen Hohlcylinders ist aber $2 q \pi a$, also hat man

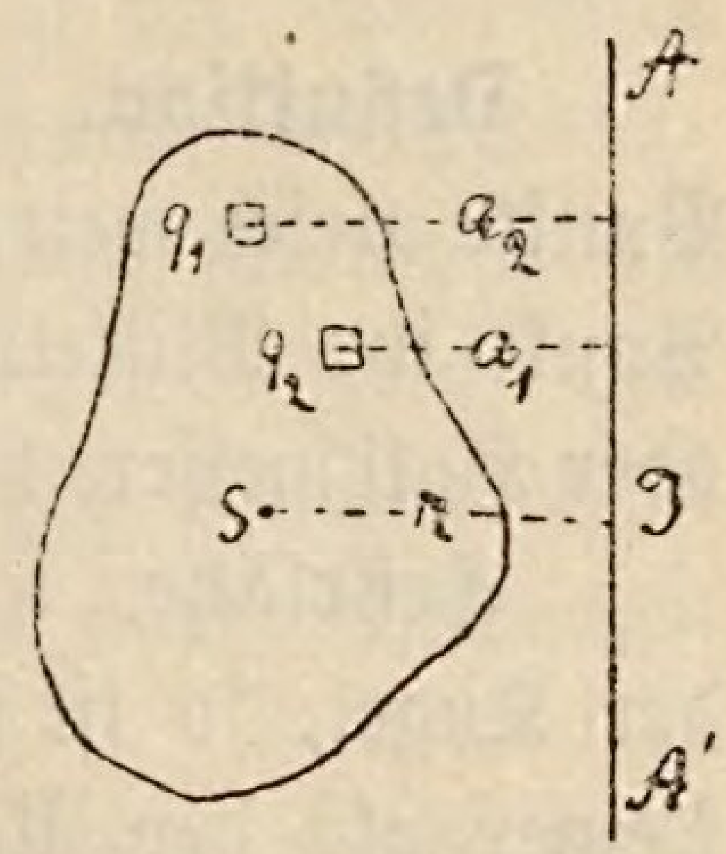


Fig. 54.

$$K = 2 q_1 \pi a_1 + 2 q_2 \pi a_2 + \ldots\ldots$$
$$= 2\pi (q_1 a_1 + q_2 a_2 + \ldots\ldots)$$

Setzt man die Summe $q_1 a_1 + q_2 a_2 + \ldots\ldots = Q . r$, so lehrt die Mechanik, daß r den Abstand SI des Schwerpunktes S der Fläche Q von der Rotationsachse bedeutet. Man hat also:

$$K = 2\pi . Q . r = Q . 2 r \pi,$$

was dem Wortlaute der Guldin'schen Regel entspricht.

Beispiele: Rotiert ein Rechteck von den Seiten a und b, dessen Schwerpunkt in der Mitte liegt um eine zur Seite b parallele Achse, welche vom Schwerpunkt den Abstand c hat, so ist die Oberfläche des entstandenen Hohlcylinders $= 2(a + b) . 2 c \pi$, und der Inhalt $= a b . 2 c \pi$, welche Werte man als richtig nachweisen mag, indem man sie direkt aus dem Hohlcylinder ableitet.

Rotiert ein rechtwinkeliges Dreieck von den Katheten a und b um die Kathete b, wovon der Schwerpunkt nach den Lehren der Mechanik den Abstand $\frac{1}{3} a$ hat, so ist der Inhalt des entstandenen Kegels

$$= \frac{1}{2} a b . 2 . \frac{1}{3} a \pi = \frac{1}{3} a^2 \pi . b,$$

was dem bekannten Inhalt eines Kegels entspricht.

Rotiert ein Kreis vom Radius r um eine Achse, von welcher sein Mittelpunkt (Schwerpunkt) den Abstand R ($>$ r) hat, so hat der entstandene Ringkörper die

Oberfläche $= 2 r\pi \,.\, 2 R\pi = 4 r R \pi^2$ und den
Inhalt $= r^2 \pi \,.\, 2 R \pi = 2 r^2 R \pi^2$.

Zur Uebung können von den Aufgaben IV die Nummern 20, 21, 43, 44, 45, 46, 47 (erste Hälfte) mittels der Guldin'schen Regel berechnet und die Resultate mit den früheren verglichen werden.

43.

Kugel.

Definition. Eine Fläche, deren Punkte alle von einem Punkte gleich weit abstehen, heißt eine Kugelfläche, der gegebene Punkt ihr Mittelpunkt oder Centrum, der Abstand der Radius oder Halbmesser, der von der Fläche begrenzte Raum heißt Kugel.

Lehrsätze. a. Liegt ein Punkt außerhalb oder innerhalb der Kugel, so ist seine Entfernung vom Mittelpunkt größer resp. kleiner als der Radius und umgekehrt. Beweis einfach.

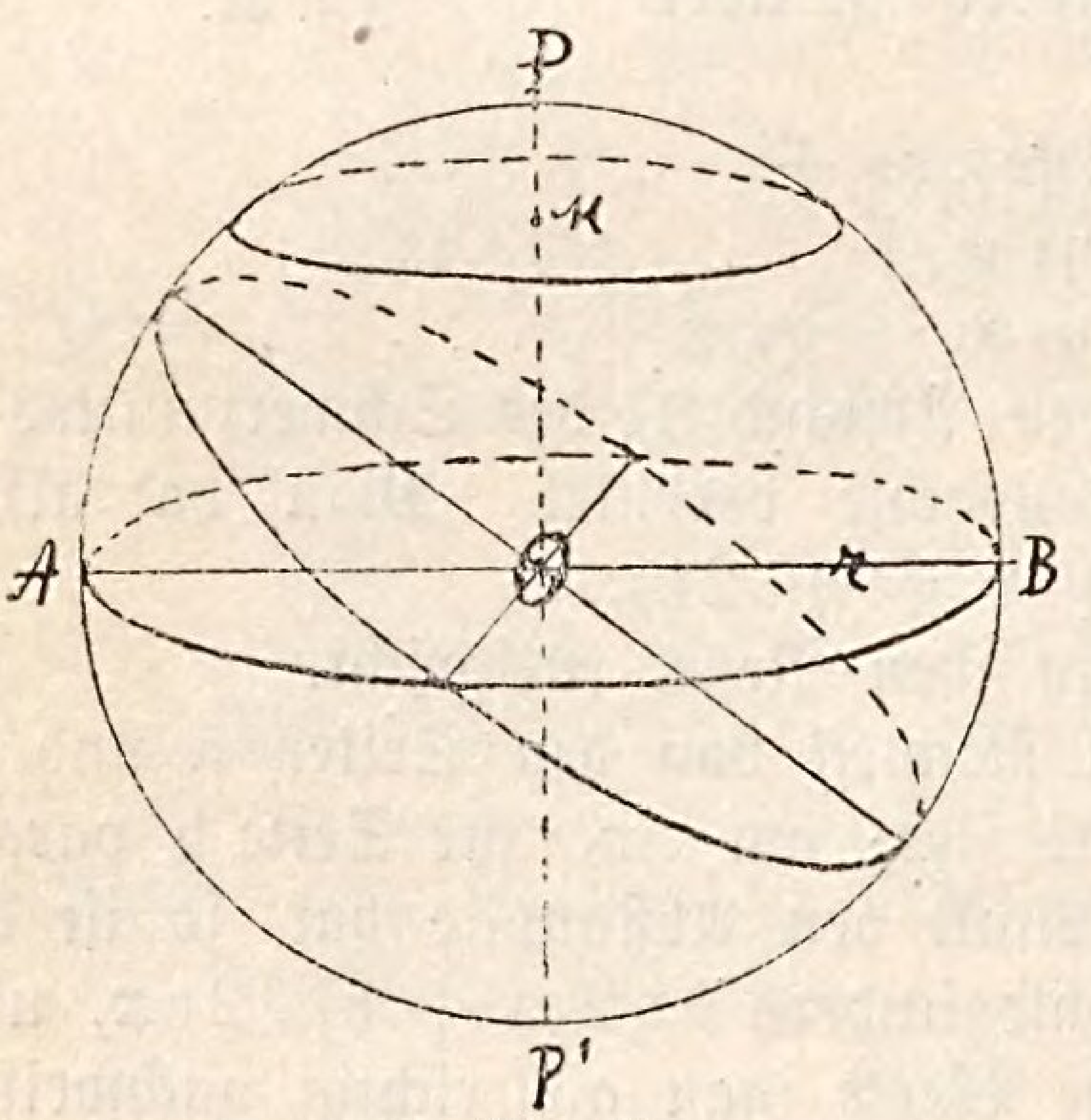


Fig. 46.

b. Jede durch den Kugelmittelpunkt gehende Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise, dessen Radius gleich dem Kugelradius ist, und teilt die Kugel in congruente Hälften, Halbkugeln. Beweis leicht.

Jeder solche Kreis heißt ein Größter Kreis oder ein Hauptkreis der Kugel. Eine im Mittelpunkt des Hauptkreises auf dessen Ebene errichtete Senkrechte trifft die Kugelfläche in zwei Punkten, welche die Pole oder sphärischen Mittelpunkte des Hauptkreises heißen. Die Schnittpunkte zweier Hauptkreise liegen auf einem Kugeldurchmesser.

c. Jeder Pol eines Hauptkreises ist von den Punkten der Peripherie des Hauptkreises gleich weit entfernt. Beweis leicht. Jeder andere Punkt der Kugeloberfläche hat ungleiche Entfernun-

gen von den Punkten der Peripherie des Hauptkreises. Beweis leicht.

d. Jede die Kugel schneidende Ebene schneidet sie in einem Kreise. Beweis: Man fällt vom Kugelmittelpunkt O die Senkrechte OM auf die Ebene, verbindet sowohl O als M mit beliebigen Punkten der Schnittlinie, so entstehen congruente Dreiecke, aus denen der Satz folgt.

Jeder Schnittkreis heißt ein Nebenkreis, kleiner Kreis, oder, insoferne seine Ebene der eines Hauptkreises oder Nebenkreises parallel ist, ein Parallelkreis.

Zusatz 1. Die vom Kugelmittelpunkt auf die schneidende Ebene gefällte Senkrechte geht durch den Mittelpunkt des Schnittkreises. Die Verlängerungen dieser Senkrechten schneiden die Kugeloberfläche in zwei Punkten, von denen jeder gleich weit entfernt ist von allen Punkten der Peripherie des Schnittkreises. Beweis leicht. Diese Punkte heißen die Pole oder sphärischen Mittelpunkte des Nebenkreises.

Umkehrungen. Verbindet man den Mittelpunkt eines Nebenkreises mit dem Kugelcentrum oder mit einem Pole, so steht diese Linie senkrecht auf der Ebene des Nebenkreises. Die Verbindungslinie der Pole eines Nebenkreises geht durch den Mittelpunkt der Kugel und den des Nebenkreises und steht auf dessen Ebene senkrecht. Beweise indirekt.

e. Von zwei Nebenkreisen hat derjenige den größeren Radius, dessen Ebene näher am Kugelmittelpunkt liegt, und umgekehrt. Beweis leicht.

f. Nebenkreise von gleichen Radien sind gleichweit vom Mittelpunkt entfernt und umgekehrt.

44.

Definition. Eine Ebene, welche einen und nur einen Punkt mit der Kugel gemeinsam hat, heißt eine berührende oder eine Tangential-Ebene.

Lehrsätze. a. Eine Ebene ist eine Tangentialebene, wenn die vom Kugelmittelpunkt auf sie gefällte Senkrechte gleich ist dem Radius. Oder: Die im Endpunkte eines Radius auf ihm errichtete Ebene ist eine Tangentialebene.

Beweis. Der Fußpunkt dieser Senkrechten gehört der Kugel an (43). Jeder andere Punkt der Ebene liegt (nach 43 a) außerhalb der Kugel, da seine Verbindungslinie mit dem Kugelmittelpunkt nicht senkrecht zur Ebene ist (4 a) folglich größer als die Senkrechte (4 c) also größer als der Radius.

b. Die Verbindungslinie des Kugelmittelpunktes mit dem Berührungspunkt einer Tangentialebene steht auf der Tangentialebene senkrecht. Beweis durch 4 c.

c. Die vom Kugelmittelpunkt auf die Tangentialebene gefällte Senkrechte geht durch den Berührungspunkt. Beweise indirekt mittels b und 4 b.

d. Die im Berührungspunkte auf einer Tangentialebene errichtete Senkrechte geht durch den Kugelmittelpunkt. Beweis indirekt mittels b und 4 b.

e. Eine Kugel ist durch vier Punkte ihrer Oberfläche bestimmt.

Beweis. Man beweist, daß es stets einen Punkt M gibt, der von den 4 gegebenen Punkten A, B, C, D gleich weit absteht. Nämlich man legt eine Ebene E, welche in der Mitte der Strecke AB auf AB senkrecht steht, so sind ihre Punkte gleichweit von A und B entfernt; ebenso legt man Eb $E_1 \perp AC$ durch die Mitte von AC und Eb $E_2 \perp AD$ durch die Mitte von AD. Die Schnittlinie G_1 von E und E_1 hat demnach in jedem ihrer Punkte gleiche Abstände von A, B, C, und die Schnittlinie G_2 von E und E_2 ebenso in Bezug auf A, B, D. Der Schnittpunkt M der Geraden G_1 und G_2 (zugleich der Schnittpunkt der drei Ebenen E, E_1, E_2) hat demnach gleiche Abstände von A, B, C, D. Man beweist noch, daß auch jede der Ebenen E_3, E_4, E_5, welche die Strecken BC, BD, DC, senkrecht halbieren, durch M geht.

45.

Fläche der Kugel.

Erklärungen. Der von einem Kreise begrenzte Teil einer Kugelfläche heißt Kugelhaube, Kugelmütze oder Calotte. Der von zwei Parallelkreisen begrenzte Teil heißt Zone.

Lehrsatz. Die Fläche der Zone ist $2 r \pi h$, wenn r den Kugelradius, h den Abstand der Ebenen der Parallelkreise, oder die Höhe der Zone bedeutet.

Beweis: Man teilt die Höhe der Zone in ungemein viele, ungemein kleine Teile, legt durch die Teilpunkte Ebenen parallel den Grenzflächen und teilt dadurch die Zonenfläche in ungemein viele, ungemein kleine Zonen. Wir betrachten eine beliebige dieser kleinsten Zonen, etwa ABA'B'. Sie kann ohne nennenswerten Fehler als Mantel eines abgestutzten Kegels betrachtet werden, dessen Radien AS und BR und dessen Höhe RS = m ist. Also ist die Mantelfläche

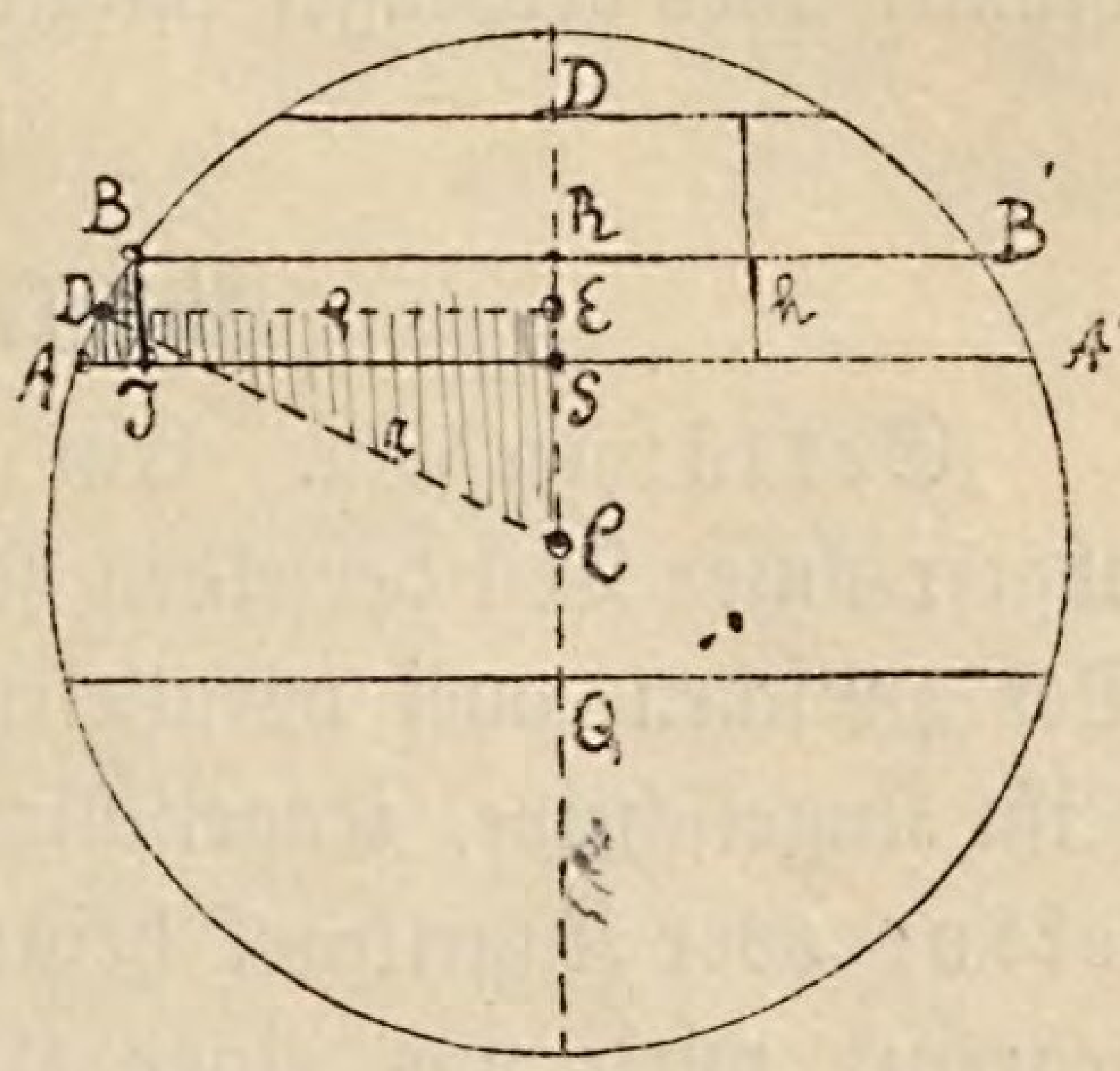


Fig. 47.

$$M = AB \,.\, \pi (AS + BR).$$

Zieht man nun den mittleren Radius DE = ρ, so ist $AS + BR = 2\rho$, also

$M = 2\pi\rho \,.\, AB$; zieht man ferner $BI \# RS = m$, sowie DC, so ist $\triangle\, ABI \sim \triangle\, DCE$ (Gleichheit der Winkel), also

$AB : BI = DC : DE$, oder

$AB : m = r : \rho$, oder

$AB \,.\, \rho = m \,.\, r$, dies eingesetzt gibt

$M = 2\pi \,.\, m \,.\, r.$

Dasselbe gilt für jede kleinste Zone. Durch Addition derselben hat man für die Zonenfläche

$M = 2\pi m_1 r + 2\pi m_2 r + \pi m_3 r + \ldots\ldots\ldots$

$M = 2 r \pi (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots\ldots)$

$M = 2 r \pi h.$

Auch für die Fläche der Kugelhaube hat man, da dieselbe Ableitung gilt,

$M = 2 r \pi h$

Für die Halbkugel $\frac{1}{2}$ O ist, da h = r zu setzen ist,

$\frac{1}{2} O = 2 r^2 \pi$, also ist die Kugeloberfläche

$O = 4 r^2 \pi$.

Zusatz 1. Die Kugeloberfläche ist gleich dem Mantel eines der Kugel umschriebenen Cylinders von gleicher Höhe.

Zusatz 2. Sowohl Zone als Kugelhaube ist gleich dem Mantel eines der Kugel umschriebenen Cylinders von gleicher Höhe.

46.

Inhalt der Kugel.

Erklärungen. Ein durch eine Ebene von der Kugel abgetrennter Teil derselben heißt Kugelabschnitt oder Segment. Der zwischen zwei parallelen Ebenen liegende Teil der Kugel heißt Kugelscheibe, Kugelschichte oder Zonenkörper. Kugelsektor oder Kugelkegel heißt derjenige Teil der Kugel, welcher begrenzt wird von einer Kugelhaube und demjenigen Kegelmantel, welcher den Grenzkreis der Kugelhaube als Grundkreis und den Mittelpunkt der Kugel als Spitze hat.

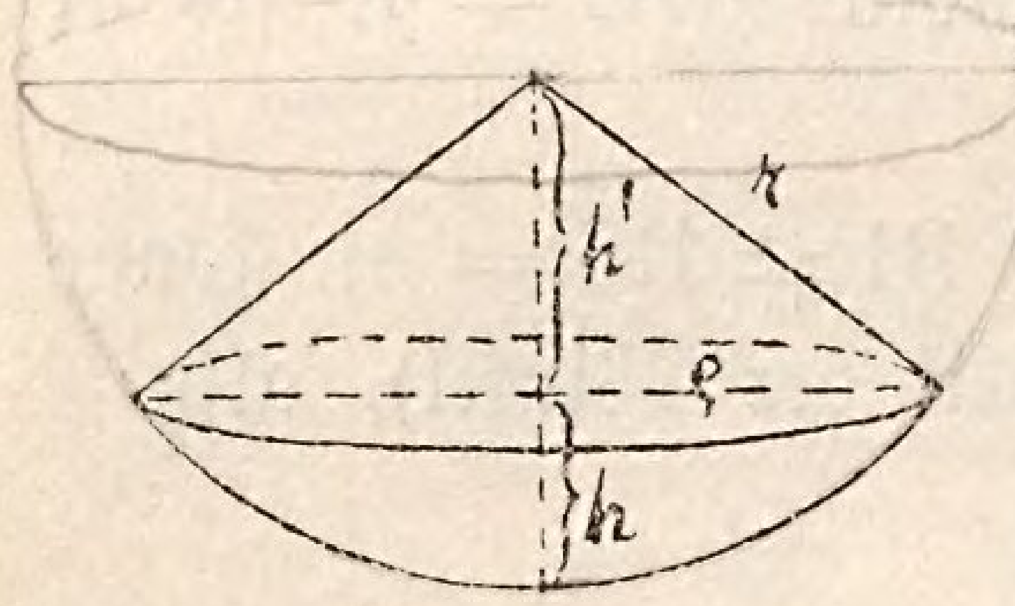


Fig. 48.

Lehrsatz. Der Inhalt eines Kugelsektors ist gleich dem einer Pyramide, deren Grundfläche gleich der Kugelhaube und deren Höhe gleich dem Kugelradius ist; also nach 45

$$\text{Kugelsektor} = \frac{2}{3} r^2 \pi h.$$

Beweis. Man teile die Kugelhaube in ungemein viele, ungemein kleine Flächenstücke, deren Dimensionen sämmtlich so klein sind, daß man jedes Flächenstück als eben ansehen kann; über diesen kleinsten Flächenstücken construiere man Pyramiden, deren gemeinsame Spitze der Kugelmittelpunkt ist, und deren Summe den Kugelsektor bildet; sie haben dann den Radius als Höhe, geben demnach addiert den Satz.

Für den Inhalt der Halbkugel $\frac{1}{2} K$ hat man hieraus da $h = r$,

$$\frac{1}{2} K = \frac{2}{3} r^3 \pi,$$

also der Inhalt der **Kugel**

$$K = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Auch die Kugel kann demnach angesehen werden als eine Pyramide, deren Grundfläche gleich der Kugeloberfläche und deren Höhe gleich dem Radius ist.

Für den Inhalt des **Kugelabschnittes** findet man, wenn man ihn als Differenz von Kugelsektor und Kegel ansieht,

$$\text{Segment} = \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{1}{3} \rho^2 \pi h';$$

da $\rho^2 = h(2r - h)$, $h' = r - h$, so erhält man leicht

$$\text{Segment} = \frac{1}{3} h^2 \pi (3r - h).$$

Die **Kugelschichte** oder der **Zonenkörper** ergibt sich als Differenz zweier Segmente. Bezeichnet r den Kugelradius, b und a die Abstände der Grenzflächen vom Mittelpunkt, und zwar $b > a$, und liegt der Kugelmittelpunkt außerhalb des Zonenkörpers, so findet man

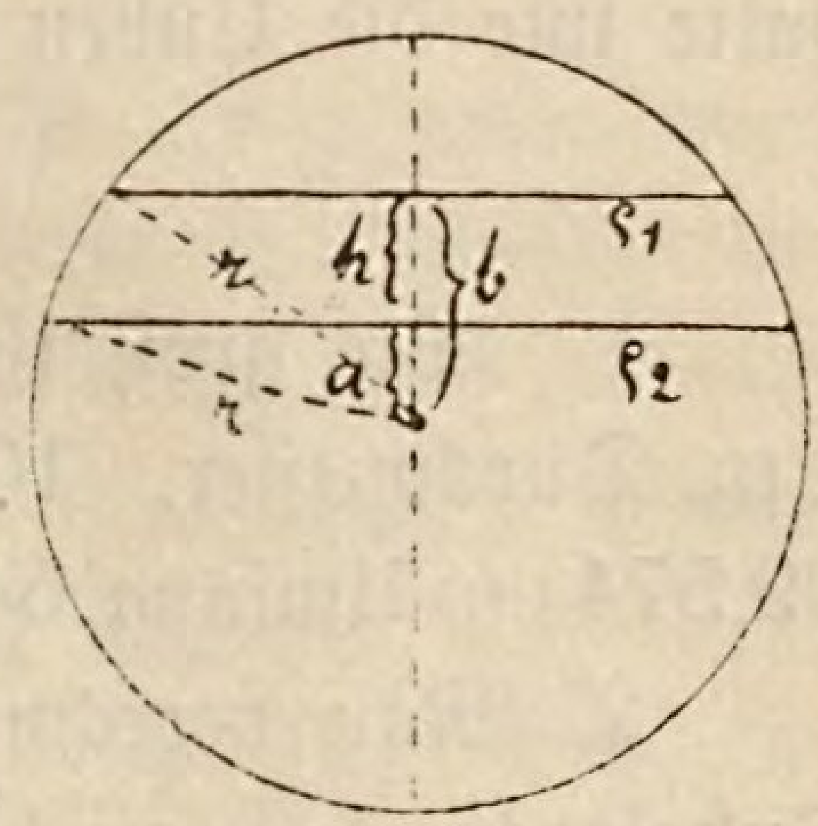


Fig. 49.

$$\text{Kugelschichte} = \frac{\pi}{3}(r-a)^2(3r - r + a)$$

$$- \frac{\pi}{3}(r-b)^2(3r - r + b) = \frac{\pi}{3}(b-a)(3r^2 - [b^2 + ab + a^2]).$$

Liegt jedoch der Kugelmittelpunkt innerhalb der Kugelschichte, so hat man:

$$\text{Kugelschichte} = \frac{\pi}{3}(r+a)^2(3r - r - a) - \frac{\pi}{3}(r-b)^2(3r - r + b)$$

$$= \frac{\pi}{3}(b+a)(3r^2 - [b^2 - ab + a^2]),$$

wobei also a gegen vorhin das Zeichen gewechselt hat.

Ist $a = 0$, geht also die eine Grenzfläche durch den Mittelpunkt, so wird daraus $\frac{b\pi}{3}(3r^2 - b^2)$, und sind beide Grenzflächen um b vom Mittelpunkt entfernt, so hat man $\frac{2b\pi}{3}(3r^2 - b^2)$.

Sind statt a, b, r die Radien ρ_1 und ρ_2 die Grenzkreise und der Abstand derselben h (die Höhe der Schichte) gegeben, so bilde man die drei Gleichungen

$$r^2 = \rho_1^2 + b^2,\ r^2 = \rho_2^2 + a^2,\ b - a = h,$$

berechne aus ihnen a, b, r, setze die Worte in die erste Formel ein und findet durch Vereinfachung:

$$\text{Kugelschichte} = \frac{1}{6}\, h\pi\,(3\,[\rho_1^2 + \rho_2^2] + h^2).$$

Wenn man für den zweiten Fall, daß der Kugelmittelpunkt innerhalb der Schichte liegt, die Gleichungen:

$$r^2 = \rho_1^2 + b^2,\ r^2 = \rho_2^2 + a^2,\ b + a = h$$

bildet und ebenso verfährt, so erhält man dieselbe Formel.

Da alle Kugeln einander ähnlich sind, so verhalten sich ihre Oberflächen wie die Quadrate der Radien und ihre Inhalte wie die Cuben der Radien.

V. Aufgaben.

1. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt einer Kugel von 1 m Durchmesser, 10 m, 1 dm Radius, 7,374 cm Radius, 29,574 cm Umfang, 5400 geographische Meilen Umfang (Erdkugel).

2. Man berechne Radius und Oberfläche einer Kugel vom Inhalte K, 1 cbm, 1 hl, 1 cdm, 1 ccm, 38,724 cdm, oder einer Kugel, deren Gewicht 50 kg und sp. G. 7,5 (Eisen) oder 1 ℔ und sp. G. 11,3 (Blei) oder 16,42 kg und sp. G. 2,7 (Stein).

3. Man berechne Radius und Inhalt einer Kugel aus der Oberfläche O, 1 qm, 1 qdm, 1 qcm, 63,42 qdm.

4. Wenn ich eine Holzkugel vom Inhalte K durch Abdrehen um 1/4 ihres Volumens verringere, um wie viel nimmt ihre Oberfläche ab?

5. Wenn man aus 5 Bleikugeln von je 8,2 mm Durchmesser eine Kugel gießt, wie groß ist deren Radius, und wie vielmal ist deren Oberfläche kleiner als die Summe der Oberflächen der 5 Kugeln?

6. Wie groß muß ein kugelförmiger Luftballon sein, der gerade seine eigene Hülle trägt, wenn das Gas, mit welchem er gefüllt wird, zweimal leichter ist als Luft, das sp. G. der Luft = 0,00129 ist und die Hülle für jeden qm 1/2 kg wiegt?

7. Was wiegt eine eiserne Hohlkugel von 32 cm äußerem Durchmesser, 5,7 cm Metallstärke und 7,5 sp. G?

8. Wie dick ist die Metallwand einer Messinghohlkugel, welche bei einem äußeren Durchmesser von 50 cm 10 kg wiegt; sp. G. 8,9?

9. Eine eiserne Hohlkugel von 30 kg Gewicht und 7,5 sp. G. schwimmt ganz unter Wasser; wie groß ist ihr äußerer Durchmesser und ihre Metallstärke?

10. Wie groß sind die Radien zweier Kugeln, deren Radien sich um 3 m, deren Oberflächen sich um 287,43 qm unterscheiden?

11. Zwei Kugeln, deren Oberflächen sich wie 7 : 4 verhalten, haben zusammen 1648 ccm Inhalt; wie groß sind ihre Radien?

12. Einer Kugel von Halbmesser r ist ein gerader Kegel einbeschrieben (umschrieben), dessen Höhe dem Durchmesser der Basis gleich ist. Wie groß ist dessen Oberfläche und Inhalt?

13. Man soll Oberfläche und Inhalt einer Kugel bestimmen, welche einem senkrechten Kegel vom Radius r = 8 dm (9,74 dm) und der Höhe h = 12 dm (11,572 dm) ein- oder umgeschrieben ist.

14. Von einer Kugel und einem gleichseitigen Kegel kennt man das Verhältnis der Oberflächen, nämlich 1 : 3, man soll daraus das Verhältnis der Inhalte berechnen. Umgekehrt soll man aus dem Verhältnis der Inhalte, 1 : 3 oder m : n, das Verhältnis der Oberflächen berechnen.

15. Auf einer Kugel befindet sich ein Kreis vom Radius $\rho = 17$ cm, welcher von seinem Pole den Abstand $d = 9$ cm hat. Man soll Oberfläche und Inhalt der Kugel berechnen.

16. Wie viel bleibt von einer Kugel übrig, wenn man in dieselbe einen Cylinder einbeschreibt, welcher halb so hoch als breit ist, und auf dessen Grenzflächen noch zwei gerade Kegel aufsetzt, welche ihre Spitzen in der Kugelfläche haben?

17. Welche Dimensionen muß der Cylinder in der vorhergehenden Aufgabe haben, damit er mitsammt den zwei Kegeln

die Hälfte der Kugel ausmache? (Kann man den Cylinder so bestimmen, daß er allein die Hälfte der Kugel ausmache?)

18. Von einer Kugel vom Radius $r = 9,2$ cm macht man einen Abschnitt von der Höhe $h = 7,4$ cm; wie groß sind Oberfläche und Inhalt dieses, sowie des übrig bleibenden Abschnittes?

19. Man berechne Mantel und Inhalt eines Kugelabschnittes aus der Höhe $h = 1,92$ m und dem Halbmesser seines Grenzkreises $\rho = 2,79$ m.

20. Dreht man einen Quadranten (Sextanten) eines Kreises vom Radius r um die Halbierungslinie seines Centriwinkels (oder um einen Grenzradius) so beschreibt er eine Kugelhaube; man berechne ihre Mantelfläche und den Inhalt des zugehörigen Segmentes.

21. Eine Kugel vom Halbmesser $r = 6$ m wird von einem Punkte A aus beleuchtet, dessen Entfernung vom Mittelpunkte $a = 10$ m beträgt; wie groß ist der beleuchtete Teil der Kugeloberfläche; wie weit muß der Punkt A vom Mittelpunkte entfernt sein, damit er 100 qm oder damit er $^1/_3$ der Kugeloberfläche beleuchte.

22. Von einer Kugelfläche vom Radius r soll eine Calotte so abgetrennt werden, daß ihre krumme Oberfläche gleich wird der Hälfte des Mantels desjenigen Kegels, welcher die Kugelfläche im Grenzkreise der Calotte berührt. In welchem Abstand vom Mittelpunkt muß die Ebene gelegt werden?

33. Eine Kugelschale soll so geformt werden, daß sich der Radius ihres Grenzkreises zu ihrer Tiefe (Höhe) wie 3 : 4 verhält, und daß sie 5 Liter faßt; wie groß sind diese Dimensionen und der Kugelradius?

24. Wie muß diese Kugelschale geformt werden, wenn bei demselben Inhalt die innere Fläche der Schale $1^1/_2$ mal so groß sein soll als die Fläche des Grenzkreises?

25. Eine Calotte vom Grundradius ρ und der Höhe h soll in einen gleichgroßen Kegelmantel verwandelt werden, dessen Grundradius und Höhe sich wie $\rho : h$ verhalten.

26. Ein Kugelabschnitt, dessen Höhe h und dessen Grundradius ρ ist, soll in einen inhaltsgleichen Kegel verwandelt

werden, bei welchem sich Grundradius und Höhe wie $\rho : h$ verhalten.

27. Ein Kugelabschnitt (Kugelradius $= r$, Höhe $= h$) soll in einen gleichgroßen Cylinder (Kegel) verwandelt werden, bei welchem sich Grundradius und Höhe ebenso verhalten wie der Radius des Grenzkreises des Abschnittes zu seiner Höhe.

28. Ein Cylinder vom Radius r und der Höhe h soll in einen ebensolchen Kugelabschnitt (wie 27) verwandelt werden; wie groß ist der Radius der Kugel und der des Grenzkreises?

29. Welche Höhe muß ein Kugelabschnitt haben, damit der einbeschriebene Kegel, welcher denselben Grundradius und dieselbe Höhe hat wie der Abschnitt, die Hälfte des Abschnittes sei, und in welchem Verhältnisse stehen dann Calotte und Kegelmantel?

30. Welche Höhe muß eine Calotte haben, damit der ihrem Grundkreis aufgesetzte Kegel, welcher seine Spitze im Mittelpunkt der Kugel (im Gegenpol der Calotte) hat, dieselbe Mantelfläche (oder denselben Inhalt) hat, wie die Calotte?

31. Welche Höhe muß ein Kugelabschnitt (Kugelradius $= r$) haben, damit die ihm eingeschriebene Kugel (welche den Grenzkreis im Mittelpunkt und die Kugelfläche im Pol des Grenzkreises berührt) gleich der Hälfte des Abschnittes ist?

32. Berechne Oberfläche und Inhalt einer Kugelzone aus dem Kugelradius $r = 9{,}2$ cm und den Abständen der Grenzebenen vom Mittelpunkt $a = 2{,}4$ cm, $b = 6{,}5$ cm, wenn beide Ebenen auf derselben Seite, oder wenn sie auf verschiedenen Seiten vom Kugelmittelpunkt liegen.

33. Berechne den Inhalt einer Kugelschichte von der Höhe $h = 8{,}42$ cm und den Grenzradien $\rho_1 = 19{,}3$ cm und $\rho_2 = 15{,}2$ cm.

34. Berechne den Inhalt einer Kugelschichte von der Höhe $h = 12{,}5$ cm, wenn die dem Mittelpunkt nähere Ebene einen Abstand von $9{,}1$ cm und ihr Kreis einen Radius $\rho = 28{,}6$ cm hat, und die andere Ebene auf derselben (auf der entgegengesetzten) Seite vom Mittelpunkt aus liegt.

35. Berechne Inhalt und Mantelfläche einer Kugelzone,

deren Höhe 0,54 m ist und deren Grenzkreise gleiche Radien von 0,87 m haben.

36. Eine Kugelzone hat als Grundfläche einen Hauptkreis vom Radius $r = 5{,}02$ dm und eine Höhe $h = 4{,}38$ m; wie groß ist Oberfläche und Inhalt?

37. Ein Kugelsektor hat als Höhe der zugehörigen Calotte h in der Kugel vom Radius r; in welchem Abstand vom Mittelpunkte muß eine Zone von derselben Höhe h angebracht werden, damit der Zonenkörper gleich dem Kugelsektor wird?

38. In eine Kugel vom Radius r soll eine Zone, deren Ebenen gleich weit vom Mittelpunkt abstehen, so gelegt werden, daß der durch die Grenzkreise gelegte Cylinder gleich der Hälfte ($= 1/3$, $= 2/3$) des Zonenkörpers wird; wie hoch wird die Zone?

39. Um eine Kugel vom Radius r soll ein reguläres sechs- (drei)seitiges Prisma so gelegt werden, daß die Grund- und die Seitenflächen die Kugel berühren. Man soll die Oberflächen und Inhalte beider Körper bestimmen.

40. Umgekehrt soll man aus der Grundkante a eines regulären dreiseitigen Prismas, das so hoch ist, daß eine eingelegte Kugel die Seitenflächen und die Gegenflächen berührt, Radius und Inhalt der Kugel berechnen.

41. Aus einer Kugel vom Radius $r = 5$ cm ist ein cylindrischer Kern herausgebohrt, dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt des herausgebohrten Kernes, wenn der Radius seines Querschnittes $\rho = 3$ cm ist?

42. Einem rechtwinkligen Parallelepiped von den Kanten a, b, c ist eine Kugel umbeschrieben; man berechne deren Oberfläche und Inhalt, sowie die Größe der Kugelabschnitte, die durch Erweiterung einer Ebene des Parallelepipeds gebildet werden.

43. Einem geraden Kreiskegel vom Radius r und der Höhe h ist eine Kugel einbeschrieben, welche die Grund- und Mantelfläche des Kegels berührt; man berechne deren Radius und Inhalt, sowie die Fläche desjenigen Kreises, in welchem die Kugel den Kegel berührt.

44. Man berechne dasselbe von der dem Kegel angeschriebenen Kugel, welche die Grundfläche und die verlängerte Mantelfläche des Kegels berührt.

45. Umgekehrt soll man aus dem Radius der Kugel die Oberfläche und den Inhalt des ihr umschriebenen Kegels berechnen, bei welchen die Höhe gleich dem Grundradius (= $1^1/_2$-mal dem Grundradius, sich zum Grundradius wie 7 : 5 verhält).

46. In eine regelmäßige vierseitige (dreiseitige) Pyramide, deren Kanten sämmtlich gleich a, soll eine Kugel einbeschrieben werden; wie groß ist deren Halbmesser und Inhalt, und wie groß ist der Inhalt desjenigen Pyramidenstumpfes, der durch eine zur Basis parallele Ebene abgeschnitten wird, welche die Kugel berührt?

47. Um eine reguläre drei- (vier-)seitige Pyramide, deren Grundkante = a, Höhe = h, soll eine Kugel beschrieben werden; man bestimme deren Radius, Oberfläche und Inhalt, sowie die Inhalte derjenigen Kugelabschnitte, welche durch Erweiterung der Grundfläche oder einer Seitenfläche gebildet werden.

48. Einer Kugel vom Radius r wird ein abgestutzter Kegel umschrieben. Man berechne dessen Mantel, Oberfläche und Inhalt, wenn gegeben ist der Radius des Grundkreises, oder der Radius des Berührungskreises des Kegels.

III. Abschnitt.

Reguläre Körper.

47.

a) **Euler'scher Lehrsatz.** In jedem Polyeder ist die Anzahl der Ecken (E) und Flächen (F) um 2 größer als die Anzahl der Kanten (K).

$$E + F = K + 2.$$

Der Beweis beruht auf folgenden Sätzen.

Beim einfachsten Körper, der dreiseitigen Pyramide, welche 4 Ecken, 4 Flächen und 6 Kanten hat, gilt der Satz. Aus der dreiseitigen Pyramide kann man jeden anderen Körper

erhalten, indem man von ihr durch Ebenen Teile abtrennt; die Ebenen können so gelegt werden, daß sie immer nur 1 Eck abtrennen, und dabei durch kein, durch 1, oder durch 2 Ecken gehen.

In jedem Falle ist die Anzahl e der neu hinzukommenden Ecken nebst der Anzahl f der hinzukommenden Flächen gleich der Anzahl k der hinzukommenden Kanten. Wird nämlich durch die Ebene ein Eck abgetrennt, in welchem n Kanten zusammenstoßen und geht die Ebene 1. durch kein Eck, so ist $e = n - 1$, $f = 1$, $k = n$; geht die Ebene 2. durch ein Eck, so ist $e = n - 2$, $f = 1$, $k = n - 1$; geht die Ebene 3. durch zwei Ecken, also durch eine Kante, so ist $e = n - 3$, $f = 1$, $k = n - 2$; also in jedem Falle $e + f = k$.

Es wird also durch Herstellung neuer Flächen die Giltigkeit der Formel nicht verändert, folglich gilt sie für alle Polyeder mit nur ausspringenden Winkeln.

b) In jedem Polyeder ist die Anzahl der Kantenwinkel W doppelt so groß als die Anzahl K der Kanten.

$$W = 2K.$$

Folgt einfach daraus, daß jede Kante an der Bildung von vier Kantenwinkeln teil nimmt, jeder Kantenwinkel aber zu seiner Bildung zwei Kanten braucht.

48.

Die regulären Polyeder.

Definition. Ein Polyeder heißt regulär, wenn alle Seitenflächen reguläre und congruente Vielecke und alle Ecken congruent sind.

Der Satz, daß die Summe der Kantenwinkel kleiner als 4 R (18a), beschränkt die Anzahl der möglichen regulären Polyeder auf nur fünf.

Soll nämlich die Seitenfläche ein reguläres Dreieck sein, dessen Kantenwinkel $= 60^0$, so können in einem Eck des Polyeders nur 3, oder 4, oder 5 Flächen zusammenstoßen. Ist die Seitenfläche ein Quadrat, so können in einem Eck nur 3, ist sie ein reguläres Fünfeck, so können in einem Eck auch nur

drei Flächen zusammenstoßen. Es gibt somit nur 5 reguläre Polyeder.

Die Sätze von 47a und b ermöglichen dann, die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen des Polyeders zu berechnen.

a) Die Seitenflächen des Polyeders seien reguläre Dreiecke, von denen je drei in einer Ecke zusammenstoßen, so ist: $W = 3E$, $W = 3F$, zudem $W = 2K$ und $E + F = K + 2$; aus diesen 4 Gleichungen bestimmt man W, E, F, K und findet $E = 4$, $F = 4$, $K = 6$.

Dieses Polyeder wird demnach von 4 Flächen begrenzt und heißt Tetraeder. Er hat die Form einer regulären dreiseitigen Pyramide, deren Seitenflächen congruent der Grundfläche.

b) Die Seitenflächen des Polyeders seien reguläre Dreiecke, von denen je 4 in einer Ecke zusammenstoßen. Es ist dann: $W = 4E$, $W = 3F$, $W = 2K$ und $E + F = K + 2$; hieraus: $E = 6$, $F = 8$, $K = 12$.

Dieses Polyeder wird somit von 8 regulären Dreiecken begrenzt und heißt Oktaeder. Es hat die Form von zwei regulären vierseitigen Pyramiden, welche ober- und unterhalb einer gemeinsamen Basis errichtet werden und deren Seitenkanten gleich sind den Grundkanten.

c) Die Seitenflächen des Polyeders seien reguläre Dreiecke, von denen je 5 in einer Ecke zusammenstoßen. Es ist dann: $W = 5E$, $W = 3F$, $W = 2K$, $E + F = K + 2$; hieraus $E = 12$, $F = 20$, $K = 30$.

Dieses Polyeder wird somit von 20 regulären Dreiecken begrenzt und heißt Ikosaeder.

Es besteht aus einem Prismatoid, dessen Gegenflächen congruente reguläre 5 Ecke, und dessen Seitenflächen reguläre Dreiecke sind; auf die Gegenflächen sind senkrechte Pyramiden aufgesetzt, deren Seitenflächen ebenfalls reguläre Dreiecke sind.

d) Die Seitenflächen des Polyeders seien Quadrate, von denen je 3 in einer Ecke zusammenstoßen, so ist: $W = 3E$, $W = 4F$, $W = 2K$, $E + F = K + 2$; hieraus $E = 8$, $F = 6$, $K = 12$.

Das Polyeder ist somit von 6 Quadraten begrenzt, heißt deshalb Hexaeder und ist der bekannte Würfel.

e) Die Seiten des Polyeders seien reguläre Fünfecke, von denen je 3 in einer Ecke zusammenstoßen, so ist: $W = 3E$, $W = 5F$, $W = 2K$, $E + F = K + 2$, hieraus $E = 20$, $F = 12$, $K = 30$.

Das Polyeder ist somit von 12 regulären Fünfecken begrenzt, heißt deshalb Dodekaeder.

(Beschreibung ohne Modell ziemlich wertlos; etwa: ein Körbchen mit fünfeckigem Boden, dessen Seitenwand von 5 anstoßenden Fünfecken gebildet wird; ein ebensolches Körbchen wird als Deckel verkehrt daraufgesetzt, so daß die Ränder auf einander passen.)

Es muß noch bewiesen werden, daß bei diesen Polyedern die Ecken congruent sind. Dies folgt bei a, d und e leicht daraus, daß die Kantenwinkel jedes Dreikantes einander gleich sind, es sind demnach auch die Flächenwinkel gleich, jedes Eck ist regulär.

Auch beim Oktaeder und Ikosaeder sollte man beweisen, daß jedes Eck regulär sein muß. Dies gelingt beim Oktaeder ziemlich leicht, beim Ikosaeder nicht, da das Datum, daß nämlich der Körper von zwanzig congruenten regulären Dreiecken begrenzt ist, die Möglichkeit einspringender Winkel nicht ausschließt.

49.

In und um jedes reguläre Polyeder läßt sich eine Kugel beschreiben. Beide Kugeln haben denselben Mittelpunkt, der auch der Mittelpunkt des Polyeders genannt wird.

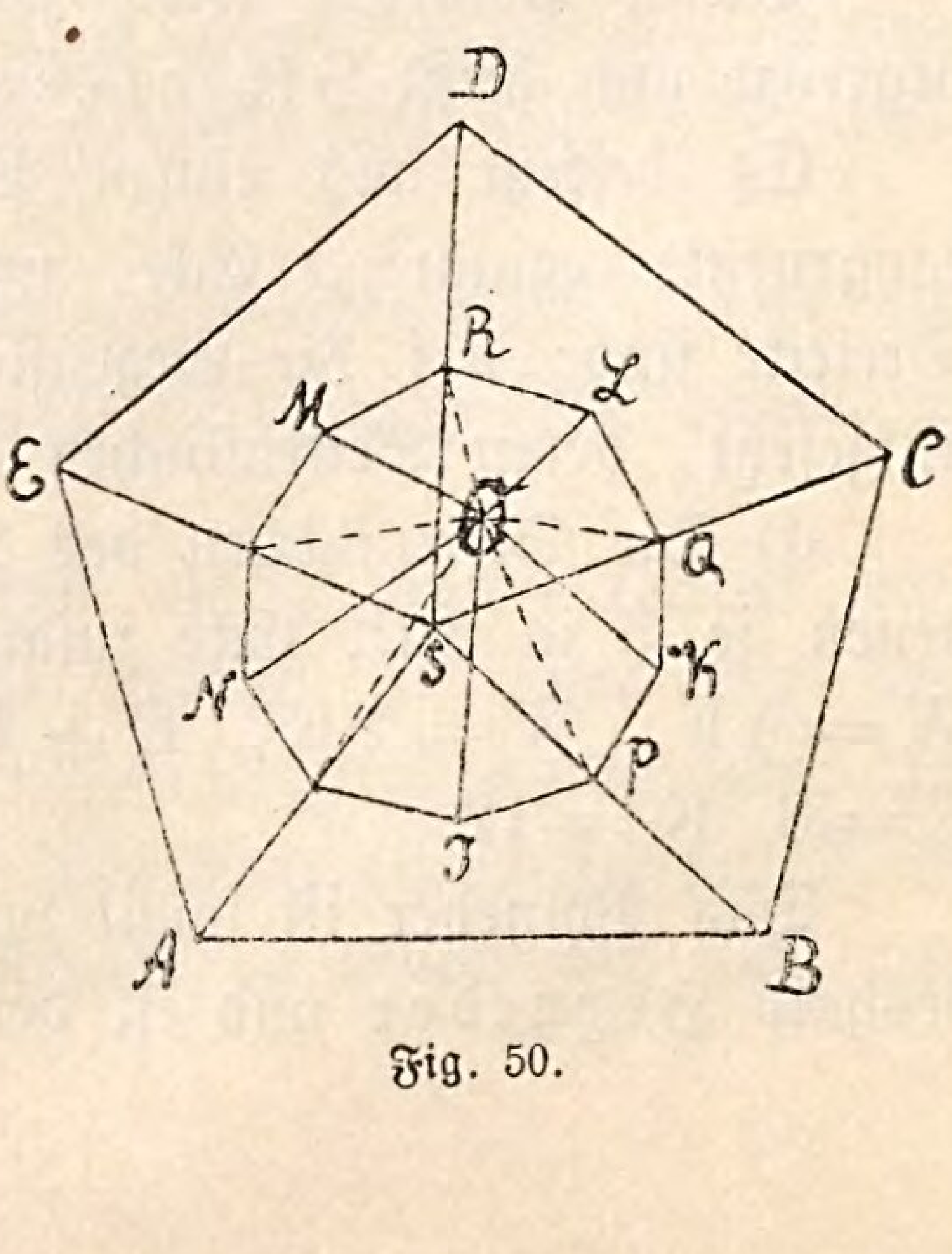


Fig. 50.

Beweis. In den Mittelpunkten zweier benachbarten Seitenflächen ASB und BSC errichte man auf die Ebenen derselben die Senkrechten, so schneiden sich dieselben in einem Punkte O. Denn die von J und K auf die gemeinsame Kante SB gefällten Senkrechten JP und KP schneiden sich in

einem Punkte (abzuleiten aus den geometrischen Eigenschaften der Mittelpunkte J und K), die durch JP und PK bestimmte Ebene enthält den Neigungswinkel an der Kante SB, steht auf beiden Ebenen ASB und SBC senkrecht und enthält somit sowohl OJ als KO. Man beweist nun, daß der so gefundene Punkt O von allen Flächen gleich weit entfernt ist. Zieht man OP so folgt aus $OP = OP$, $JP = PK$, $\sphericalangle J = \sphericalangle K = R$, daß $\triangle OJK \cong \triangle OKP$ und hieraus, daß $OJ = OK$, sowie daß $OPJ = OPK = \frac{1}{2} JPK$, daß also OP den Neigungswinkel halbiert. Macht man ferner $KQ \perp SC$, $QL \perp SC$, $OL \perp LQ$, und zieht QO, so ist $\sphericalangle LQK$ der Neigungswinkel an der Kante SC, somit $= \sphericalangle JPK$. Aus $\triangle OKP \cong \triangle OQP$ folgt $\sphericalangle OQK = \sphericalangle OPK$, also halbiert OQ den Neigungswinkel an SC. Hieraus folgt $\triangle KQO \cong \triangle OQL$, woraus $OL = OK = OJ$; da zudem $LQ = QK$, so ist L der Mittelpunkt von SDC; schließlich ist $OL \perp$ Eb DSC, also geht die von O auf die Fläche SDC gefällte Senkrechte durch ihren Mittelpunkt und ist gleich der auf Eb SBC gefällten Senkrechten. So weitergehend beweist man dasselbe für alle Flächen des Polyeders. Beschreibt man also mit OJ als Radius um O eine Kugel, so berührt diese sämtliche Flächen des Polyeders in deren Mittelpunkten.

Daß O auch gleichweit von den Ecken entfernt sei, beweist man leicht aus $\triangle OPB \cong \triangle OQC \cong \triangle ORD$ 2c. folglich ist O auch der Mittelpunkt der dem Polyeder umschriebenen Kugel.

VI. Aufgaben.

Aus der Seitenkante a der regulären Polyeder berechne man die Radien der um- und eingeschriebenen Kugeln, die Oberflächen und die Inhalte der Polyeder.

Diese Aufgabe löst sich leicht beim Tetra-, Hexa- und Oktaeder. Beim Ikosaeder bemerke man, daß der Radius der umschriebenen Kugel gefunden wird als Radius einer Kugel, welche einer regulären fünfseitigen Pyramide von lauter gleichen Kanten a umschrieben ist, und beim Dodokaeder, daß man nur eine regulär dreiseitige Pyramide zu betrachten hat, deren Grundkante gleich der Diagonale eines Fünfecks von der

Seite a und deren Seitenkante = a ist, die dieser Pyramide umschriebene Kugel ist dem Dodekaeder umschrieben. Der Radius der einbeschriebenen Kugel ist dann die Länge der Senkrechten, welche vom Mittelpunkt auf eine Seitenfläche gefällt wird. Der Inhalt des Polyeders ist der einer Pyramide, welche die Oberfläche als Grundfläche und den Radius der einbeschriebenen Kugel als Höhe hat.

Aufgaben, in denen eine der in voriger Aufgabe gesuchten Größen gegeben ist, lösen sich, indem man das gegebene und das gesuchte durch die Kante a ausdrückt, und diese dann eliminiert.

VII. Aufgaben.

Vermischte Uebungsaufgaben.

1. Von einem Würfel mit der Kante a schneide ich weg 1) die Ecken durch Ebenen, welche je durch das erste Drittel der in der Ecke zusammenstoßenden Kanten gehen (die Schnittfiguren sind Dreiecke). 2) Von dem übrig bleibenden Körper schneide ich Stücke ab durch Ebenen, welche den einzelnen Würfelkanten parallel sind und durch die Mitten der durch 1 entstandenen Dreiecke gehen. Wie groß ist der Abfall, der Inhalt und die Oberfläche des übrig bleibenden Körpers?

2. Von einer senkrechten quadratischen abgestutzten Pyramide von den Gegenkanten a und b und der Höhe h schneide ich längs (nicht parallel) der Seitenkanten Stücke ab, so daß aus den Gegenflächen reguläre Achtecke werden. Wie groß ist der Abfall und der übrigbleibende Körper?

3. Wie viel wird von demselben Körper (2) abgeschnitten, wenn die Schnittebenen durch je ein Eck der Deckfläche und die Mitten der in dem entsprechenden Eck der Grundfläche zusammenstoßenden Grundkanten gehen?

4. Wie viel bleibt von demselben Körper (wie 2) über, wenn von den zusammenstoßenden Kanten der Grundfläche (wie bei 3) nur so viel abgeschnitten wird, daß von jeder Grundkante ein Stück = b erhalten bleibt?

5. Um eine senkrechte Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten a und 2a und der Höhe 3a, wird

eine Kugel beschrieben; man berechne deren Radius, Oberfläche und Inhalt, sowie die Inhalte derjenigen Kugelabschnitte, welche durch Erweiterung der Grundfläche oder je einer der Seitenflächen gebildet werden.

6. Um eine vier- (drei-) seitige senkrechte abgestutzte Pyramide von der Höhe h, deren Grund- und Deckfläche reguläre Vier- (Drei-) ecke von den Seiten a und b sind, wird eine Kugel beschrieben. Man berechne deren Radius, den Abstand ihres Mittelpunktes von den Seitenflächen, sowie den Inhalt des Zonenkörpers, welche durch die erweiterte Grund- und Deckfläche von der Kugel ausgeschnitten wird.

7. Mache dieselbe Aufgabe bei einer regulären abgestutzten sechsseitigen Pyramide, deren Grundkante = a, Deckkante = $^1/_2$ a, Höhe = a.

8. In und um eine reguläre abgestutzte vier- (drei-, sechs-) seitige Pyramide wird ein abgestutzter Kegel von gleicher Höhe beschrieben; man gebe das Verhältnis der drei Körper an, wenn die abgestutzte Pyramide die Gegenkante a und b und die Höhe h hat.

9. Einer senkrechten regelmäßig dreiseitigen Pyramide, deren Grundkante a und deren Höhe auch = a (= $^1/_2$ a, oder deren Seitenkante = 2 a, = $1^1/_2$ a) ist, wird eine Kugel einbeschrieben; man berechne deren Radius, Oberfläche und Inhalt, sowie die Fläche desjenigen Parallelkreises, der durch die drei Berührungspunkte der Seitenflächen mit der Kugel geht.

10. Um eine senkrechte quadratische Pyramide, deren Grundkante = a, Höhe = a (= 2 a, oder deren Seitenkante = a, = 2 a) soll eine Kugel beschrieben werden; wie groß ist deren Radius, Oberfläche und Inhalt, sowie die Größe der Kugelabschnitte, die durch Erweiterung der Grundfläche oder einer Seitenfläche abgeschnitten werden.

11. Einer Kugel vom Radius r soll ein gerader abgestutzter Kegel umbeschrieben werden, dessen kleinere Gegenfläche gleich der Hälfte der größeren ist. Wie groß ist sein Volumen?

12. Eine senkrechte quadratische Pyramide von der Grundkante a, deren Seitenflächen gegen die Grundfläche eine Neigung

von je 60^0 haben, soll so abgestutzt werden, daß die Höhe des Stumpfes $= \frac{1}{2}a$; man berechne Inhalt und Oberfläche des Stumpfes.

13. An eine quadratische Pyramide von der Grundkante a und der Höhe h wird von der Basis aus nach abwärts durch Erweiterung der Seitenflächen ein Pyramidenstumpf von der Höhe h_1 angesetzt; wie groß ist dessen Oberfläche und Inhalt?

14. An die Grenzflächen eines Cylinders vom Radius $r = 65$ cm und der Höhe $h = 123$ cm sind nach außen gewölbte Kugelschalen von der Höhe $b = 27$ cm angesetzt; man berechne Oberfläche und Inhalt des ganzen Körpers.

15. In einen geraden Kreiskegel vom Grundradius $= r$ und der Höhe $2r$ ist ein Würfel so gestellt, daß 4 Ecken in der Grundfläche, die vier anderen in der Mantelfläche des Kegels liegen. Oberhalb des Würfels wird wieder ein Würfel in den kleineren Kegel beschrieben und so fort. Man berechne die Kanten und Inhalte dieser Würfel und die Summe der Inhalte aller Würfel.

16. Ein auf der Spitze stehender gerader Kreiskegel vom Grundradius $r = 5$ cm und der Höhe $h = 12$ cm ist bis zur Höhe $a = 7$ cm mit Wasser gefüllt. Es wird nun eine Kugel vom Radius $\rho = 2$ cm hineingeworfen; wie hoch steigt dann das Wasser, wenn die Kugel ganz untersinkt?

17. Ein Draht, dessen Querschnitt ein Kreis vom Radius ρ, wird zu einem Ring gebogen, dessen Radius im Lichten $= r$; dieser Ring liegt auf einer Ebene und auf demselben und zugleich auf der Ebene liegt eine Kugel, beide berührend. Wie groß ist der Radius des Kreises, in welchem sich Ring und Kugel berühren; wie groß ist ferner Radius und Inhalt der Kugel?

18. Wie hoch muß eine Kugelhaube in der Kugel vom Radius r sein, wenn ihre Fläche ebenso groß sein soll wie der Mantel desjenigen Kegels, welcher auf ihrem Grundkreis aufsitzt und in ihrem Gegenpole seine Spitze hat?

19. Eine dreiseitige Pyramide hat als Grundfläche ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Katheten $AC = a$ und $BC = b$;

die Seitenkante AS = c steht auf der Grundfläche senkrecht; man berechne Inhalt und Oberfläche. Man berechne ferner die Größe der Teile, in welche diese Pyramide durch eine Ebene zerschnitten wird, welche der Ebene CSB parallel ist und von der Ecke A den Abstand h hat.

20. Eine dreiseitige Pyramide ABCS hat als Grundfläche ein gleichschenkeliges Dreieck von der Basis AB = a und den Schenkeln BC = AC = b; seine Höhe ist h. Man berechne die Stücke, in welche sie zerlegt wird durch eine Ebene, welche durch C und die Mitten P und Q der gegenüberliegenden Seitenkanten AS und BS geht.

21. Eine dreiseitige Pyramide hat als Grundfläche ein reguläres Dreieck von der Seite a, als Seitenflächen rechtwinkelig-gleichschenkelige Dreiecke von der Hypotenuse a; man berechne Oberfläche und Inhalt, sowie die Radien der um- und der einbeschriebenen Kugel.

22. Ein Kegel vom Radius r und der Höhe h soll in einen inhaltsgleichen Cylinder verwandelt werden, dessen Radius und Höhe sich wie r : h verhalten; wie groß sind diese? Man stellt nun Cylinder und Kegel so in einander, daß Grundebenen und Achsen je zusammenfallen, und berechne die Radien der Kreise, in welchen der Kegelmantel von der Cylinderoberfläche geschnitten wird.

23. Um den Mantel eines abgestutzten Kegels von 1 Liter Inhalt zu schneiden habe ich schon mit 30 cm Radius einen Kreisbogen gemacht, und will ihm einen Centriwinkel von 90° geben; mit welchem Radius muß ich den anderen Kreisbogen ziehen?

24. Eine Halbkugel (r) wird von einem abgestutzten Kegel umhüllt, dessen Seitenlinie mit der Grundfläche 60° Neigung bildet. Wie groß ist der Unterschied beider Körper?

25. Ein Cylinder, welcher ebenso ($1\frac{1}{2}$mal so) hoch als breit ist, soll längs der Achse durchbohrt werden; das herausgebohrte soll ersetzt werden durch zwei Halbkugeln, welche auf den Gegenflächen aufsitzen und den Radius des Cylinders als Radien haben. Welchen Radius hat die Bohrung?

26. Eine Kugel vom Radius r wird von einer unbegrenzten Kegelfläche berührt, deren Spitze vom Kugelmittelpunkt den Abstand a hat. Es werden nun sowohl in den Raum, welcher der Spitze zugewendet ist, als auch in den abgewendeten Raum noch je zwei Kugeln so gelegt, daß sie je die benachbarte Kugel und die Kegelfläche berühren. Man bestimme die Radien der Kugeln, die Abstände ihrer Mittelpunkte von der Spitze und die Summe der Inhalte der 5 Kugeln.

27. Zwei Kugeln von den Radien r_1 und r_2 berühren sich von außen und werden von einer gemeinsamen Kegelfläche berührt; man soll rechts und links von beiden Kugeln noch je eine Kugel anbringen, so daß sie die benachbarte Kugel und die Kegelfläche berührt und die Summe der Inhalte der vier Kugeln angeben. Man berechne auch Oberfläche und Inhalt des abgestutzten Kegels, welcher die ersten zwei Kugeln einhüllt.

28. Welchen Abstand müssen zwei Kugeln von den Radien r und ρ haben, damit zwischen sie eine dritte Kugel so gelegt werden kann, daß sie beide Kugeln berührt und daß doch alle drei Kugeln von derselben gemeinschaftlichen Kegelfläche berührt werden.

29. Zwei Kugeln von den Radien R und r werden von einer gemeinschaftlichen Kegelfläche berührt, deren Spitze zwischen den beiden Kugeln liegt. Legt man eine dritte Kugel so, daß sie die größere und die Kegelfläche gegen die Spitze zu berührt, so ist sie gleich der kleineren. Man berechne hieraus den Abstand der zwei ersten Kugeln, den Inhalt der dritten und den Inhalt einer vierten, welche die kleinere und die Kegelfläche gegen die Spitze zu berührt.

30. Ein gleichseitiger Kegel ist so abgestutzt, daß die Höhe gleich dem Grundradius r; sowohl an die Grund- als an die Deckfläche sind nach außen gewölbte Kugelflächen so angesetzt, daß sie an den Ansatzstellen von dem erweiterten Kegelmantel berührt werden. Man berechne Oberfläche und Inhalt des aus dem abgestutzten Kegel und den Kugelsegmenten bestehenden Körpers. Dieselbe Aufgabe soll unter der Voraussetzung berechnet werden, daß der Radius r und die Höhe h ist.

31. Ein Waschkessel hat die Form eines abgestutzten Kegels von 130 cm oberem, 100 cm unterem Durchmesser und 80 cm Höhe; statt des ebenen Bodens ist eine nach unten gewölbte Kugelschale angesetzt, welche so geformt ist, daß sie an den Ansatzstellen vom erweiterten Kegelmantel berührt wird. Man berechne die innere Fläche und den Inhalt des Kessels.

32. Auf einen beiderseits offenen Cylinder vom Grundradius r und der Höhe r wird oben eine Kugel gelegt, deren Radius $= 1^1/_2 r$; wie tief senkt sie in den Cylinder ein? Es soll nun auf den unteren Grenzkreis des Cylinders ebenso eine Kugel gelegt werden, welche die erste berührt; wie groß ist deren Radius? Schließlich soll derjenige Raum des Cylinders berechnet werden, welcher nicht von den Kugeln eingenommen wird.

33. Was wiegt ein Eisenstück, welches aus einem Cylinder vom Radius $\rho = 4$ cm, $h = 11$ cm, und zwei an seine Grenzflächen angesetzten Kugelsegmenten besteht, von denen jedes größer ist als eine Halbkugel und einen Kugelradius $r = 6$ cm besitzt? sp. G. = 7,6.

VIII. Aufgaben.

Aufgaben mit Trigonometrie.

1. Welchen Inhalt hat ein Parallelepiped, dessen Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten $a = 12{,}4$ cm, $b = 37{,}3$ cm, und dessen Seitenkante $c = 39{,}4$ cm mit der Grundfläche einen Winkel $\alpha = 74^0 12'$ bildet?

2. Bei einem Parallelepiped haben drei in einem Ecke zusammenstoßende Kanten die Längen $a = 24{,}82$ dm, $b = 39{,}11$ cm, $c = 5{,}74$ m und bilden drei Kantenwinkel, von welchen zwei je 90^0, der dritte $\gamma = 61^0 47'$ ist. Man berechne Inhalt und Oberfläche des Parallelepipedes.

3. Bei einem Parallelepiped kennt man die drei in einem Eck zusammenstoßenden Kanten $a = 86{,}42$ cm, $b = 101{,}06$ cm, $c = 54{,}27$ cm, die Kantenwinkel $(ab) = \alpha = 127^0 14'$, $(ac) = \beta = 79^0 15'$ und den von den Ebenen (ab) und (ac) gebildeten Winkel $\gamma = 72^0 47'$. Man berechne den Inhalt.

4. Ein rechtwinkeliges Parallelepiped von den Grundkanten $a = 7{,}42$ m, $b = 3{,}71$ m und der Höhe $h = 12{,}58$ m wird durch eine Ebene schief abgeschnitten, welche durch die Deckkante b geht und mit der Grundfläche einen Winkel von $\beta = 22^0 30'$ bildet. Wie groß sind die anderen Kanten und der Inhalt?

5. Wie groß sind die Kanten und der Inhalt desselben Parallepipedes, wenn es auch noch durch eine Ebene schief abgeschnitten wird, welche durch die Grundkante a geht und mit der Grundfläche den Winkel $a = 18^0 20'$ bildet?

6. In einer quadratischen Pyramide von der Grundkante a steht eine Seitenkante auf der Grundfläche senkrecht und hat die Länge $^1/_2 a$; welche Neigung haben die anderen Seitenkanten. Man berechne Oberfläche und Inhalt der Pyramide.

7. In einer regulär sechsseitigen Pyramide von der Grundkante a steht eine Seitenkante senkrecht zur Grundfläche und hat die Länge $2a$; man berechne Länge und Neigung der anderen Seitenkanten.

8. In einer Ecke stoßen drei Strecken von den Längen a, b, c senkrecht auf einander und bilden die Seitenkanten einer Pyramide. Man berechne die Neigungswinkel der Seitenflächen zur Grundfläche allgemein und für $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$; man berechne ferner die zu dieser Grundfläche gehörige Höhe, und aus ihr und dem Inhalt $= {}^1/_6 abc$ diese Grundfläche selbst.

9 Von einer senkrechten quadratischen (regelmäßig dreiseitigen) Pyramide ist gegeben die Grundkante $a = 14{,}72$ dm und der Winkel $\alpha = 37^\circ 14'$ zwischen zwei Seitenkanten. Man soll Oberfläche und Inhalt berechnen.

10. Bei einer regulären drei- (vier-, fünf-)seitigen Pyramide soll aus Grundkante $a = 29{,}7$ und $h = 18{,}5$ (oder aus Grundkante $a = 0{,}73$ und Seitenkante $b = 1{,}27$, oder aus Seitenkante $b = 9{,}72$ und Höhe $h = 7{,}48$) die Neigung der Seitenkanten und Seitenflächen gegen die Grundfläche berechnet werden.

11. In einer regelmäßig sechs- (vier-)seitigen Pyramide ist die Grundkante $= 11{,}47$, die von der Spitze auf sie gefällte Senkrechte $= 9{,}53$; man soll den Inhalt der Pyramide

und die Neigung einer Seitenfläche gegen die Grundfläche bestimmen.

12. Eine senkrechte Pyramide hat als Grundfläche ein Rechteck von den Seiten $a = 7,38$, $b = 12,47$, die Seitenkante bildet mit der Grundkante a den Winkel $\alpha = 62^\circ 50'$; man berechne die Höhe, die Neigung der Seitenkanten und Seitenflächen gegen die Grundfläche.

13. Aus dem Volumen $V = 74,92$ cdm einer senkrechten quadratischen Pyramide und dem Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche $\alpha = 53^0 17' 31''$ soll man die Grundfläche und die Seitenflächen berechnen.

14. Eine reguläre sechsseitige Pyramide hat das Volumen $V = 2$ cbm; zwei gegenüberliegende Seitenflächen sind gegen einander unter dem Winkel $\alpha = 60^\circ (= 74^\circ 20')$ geneigt. Man soll Grundkante und Höhe berechnen.

15. Eine Pyramide hat als Grundfläche ein gleichschenkeliges Dreieck von den Seiten $a = 9,4$ und $b = 11,8$; die Höhe $h = 10,2$ geht durch den Schwerpunkt der Grundfläche. Man berechne die Neigungen der Seitenkanten und Seitenflächen gegen die Grundfläche.

16. Eine Pyramide hat als Grundfläche ein rechtwinkeliges Dreieck von den Katheten a und b; die Höhe h geht durch die Mitte der Hypotenuse (und ist deren Hälfte gleich). Man berechne Oberfläche und Inhalt der Pyramide und die Neigungen der Seitenkanten und Seitenflächen gegen die Grundfläche.

17. Ein senkrechtes Prisma hat als Grundfläche ein reguläres Dreieck von der Seite $a = 9$ cm; es ist schief abgeschnitten, so daß die Kantenlängen $= p, q, r = 18, 22, 25$ sind. Man berechne Inhalt und Oberfläche sowie den Neigungswinkel der schiefen Deckfläche gegen die Grundfläche. (Die Grundfläche ist die Projektion der Deckfläche.)

18. Berechne Oberfläche und Inhalt einer senkrechten quadratischen abgestutzten Pyramide von der Grundkante $a = 22,14$ cm, Höhe $h = 18,96$ cm und dem Neigungswinkel $\alpha = 54^0 51'$ der Seitenflächen gegen die Grundflächen.

19. Die Mantelfläche einer regulären dreiseitigen abge-

stutzten Pyramide besteht aus 3 gleichschenkeligen Trapezen, deren größere Parallelseite a = 38,94 cm, schräge Seite = 46,52 cm und eingeschlossener Winkel = 76° 15′ ist. Man berechne Oberfläche, Inhalt und den Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche.

20. Von einer regulären sechsseitigen abgestutzten Pyramide kennt man die Kante der Deckfläche = a = 1,52 m, die Höhe = 1,17 m, und die Neigung der Seitenkante gegen die Grundfläche $\alpha = 41^\circ 11'$; wie groß ist ihr Inhalt?

21. Aus dem Neigungswinkel $\alpha = 54^\circ 17'$ der Seitenflächen einer senkrechten quadratischen (abgestutzten) Pyramide soll man den Neigungswinkel β der Seitenkante gegen die Grundfläche und den Winkel γ der Seitenkante gegen die Grundkante berechnen.

22. Umgekehrt soll man aus $\beta = 37^\circ 41'$ α und γ, und aus $\gamma = 78^\circ 4'$ α und β berechnen.

23. Dieselbe Aufgabe soll für eine reguläre drei-, (fünf-, sechs-, sieben-, acht-) seitige Pyramide gemacht werden. (Man bemerke, daß ein solcher Winkel die Form der regulären Pyramide bestimmt, wenn die Seitenzahl bekannt ist. Für die abgestutzte Pyramide muß noch ein davon unabhängiges Merkmal dazu kommen.)

24. Von einer senkrechten quadratischen Pyramide, bei welcher zwei gegenüberliegende Kanten auf einander senkrecht stehen (einen Winkel von 106° bilden), soll von der Spitze aus zuerst eine Pyramide, dann ein Stumpf, dann noch ein Stumpf abgeschnitten werden. Wie hoch müssen diese Stücke sein, wenn ihre Inhalte je 1 cbm betragen sollen?

25. Eine senkrechte quadratische abgestutzte Pyramide hat die Höhe h = 4,1 dm, einen Inhalt J = 292 cdm und einen Neigungswinkel der Seitenfläche gegen die Grundfläche $\alpha = 47^\circ 12'$; wie groß ist Grund- und Deckkante?

26. Das Volumen einer geraden quadratischen (regelmäßig dreiseitigen) Pyramide ist V = 100 cbm; der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Basis ist $\alpha = 54^\circ 12'$; wie groß sind die Grundkanten, und wie groß sind die Volumina des um und des in die Pyramide beschriebenen Kegels?

27. Aus dem Grundradius $r = 9,07$ und dem Neigungswinkel der Seitenkante gegen die Grundfläche $\alpha = 20°7'$ soll man Inhalt und Mantel des Kegels berechnen.

28. Ebenso aus der Höhe $h = 0,603$ m und dem Winkel zwischen Seitenlinie und Höhe $\alpha = 12° 58' 54''$.

29. Ebenso aus der Seitenlinie $s = 80$ m und dem Winkel zwischen gegenüberliegenden Seitenlinien $\alpha = 140° 17'$.

30. Der Inhalt eines Kegels ist $V = 100$ ccm, der Neigungswinkel der Seitenkante gegen die Grundfläche beträgt $\alpha = 33°$; wie groß ist Radius und Höhe?

31. Aus der Oberfläche $O = 50$ qdm eines Kegel soll man dessen Höhe berechnen, wenn sie mit der Seitenlinie den Winkel $\alpha = 27°$ bildet.

32. Aus dem Winkel $\alpha = 31° 12'$ zwischen Seitenkante und Grundfläche soll man den Centriwinkel n des Sektors berechnen.

33. Umgekehrt soll man aus dem Winkel $n = 130°$ ($= 296°$) den Neigungswinkel α berechnen.

34. Ueber derselben kreisförmigen Grundfläche vom Radius $r = 20$ cm erheben sich zwei gerade Kegel, deren Seitenkanten unter $\alpha = 22° 15'$ resp. $\beta = 64° 30'$ gegen die Grundfläche geneigt sind; wie groß ist das Volumen des von den beiden Kegelmänteln eingeschlossenen Raumes, und wie groß muß α sein, damit der genannte Raum gleich der Hälfte des vollen Kegels sei.

35. Ein rechtwinkeliges Dreieck mit der Hypotenuse $c = 10$ und einem spitzen Winkel $\alpha = 27° 40'$ wird um die Hypotenuse gedreht; man bestimme Oberfläche und Inhalt des entstandenen Rotationskörpers.

36. Wie wird die Lösung der vorigen Aufgabe, wenn das Dreieck schiefwinkelig und der andere dem c anliegende Winkel $\beta = 51° 20'$ ist?

37. An einen Cylinder, dessen Höhe gleich $1/2$ des Grundradius ist, wird an jede Gegenfläche ein gerader Kegel mit dem Neigungswinkel $\alpha = 17° 12'$ angesetzt. Wenn nun der

Inhalt des ganzen Körpers $V = 3$ cbm ist, wie groß sind die Dimensionen des Cylinders und der Kegel?

38. Der Inhalt eines abgestutzten Kegels soll aus dem Radius $R = 12$ m der größeren Gegenfläche, dem Winkel $\alpha = 19^\circ$ der Seitenkante gegen diese Grundfläche und der Höhe $h = 1,4$ m berechnet werden.

39. Umgekehrt soll aus dem Inhalt $J = 1100$ cbm, dem größeren Grundradius $R = 11$ m und dem Neigungswinkel $\alpha = 36^\circ$ die Höhe und der Deckradius berechnet werden.

40. Ebenso soll aus dem Inhalt $J = 325$ cbm, der Höhe $h = 4$ m und dem Neigungswinkel $\alpha = 47^\circ$ die Größe der Radien berechnet werden.

41. Der Inhalt eines abgestutzten Kegels soll aus der Mantelfläche $M = 400$ qcm, der Seitenkante $s = 10$ cm und ihrer Neigung $\alpha = 71^\circ 50'$ berechnet werden.

42. Bei einem 7 m hohen abgestutzten Kegel von 72 cbm Inhalt verhalten sich die Kreisflächen wie 9 : 5; wie groß sind die Radien und die Neigung der Seitenkante?

43. In eine Kugel vom Radius $r = 12$ cm ist ein gerader Kegel einbeschrieben, der an der Spitze einen Winkel $\alpha = 44^\circ 18'$ hat; man berechne Mantel und Inhalt dieses Kegels, sowie den Inhalt des durch seine Grundfläche abgeschnittenen Segmentes.

44. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt eines Kugelsektors, wenn der zugehörige Kegel an der Spitze einen Winkel von $138^\circ 53'$ hat und der Kugelradius $r = 1$ ist?

45. Welchen Winkel muß dieser Kegel an der Spitze haben, wenn der Kugelsektor $= 1/4$ $(= 1/2, = 3/4, = 3/5)$ der Kugel sein soll?

46. Ein rechtwinkeliges Dreieck von der Hypotenuse $r = 30$ cm und dem spitzen Winkel $\alpha = 39^\circ 32' 7''$ rotiert um die Hypotenuse; um wie viel ist der Inhalt des entstandenen Doppelkegels kleiner als der Inhalt der umschriebenen Kugel und um wie viel ist er größer als der Inhalt der dem Doppelkegel eingeschriebenen Kugel?

47. Von einem Kugelsektor kennt man die Höhe des ihm

zugehörigen Kegels $h = 20$ und den Winkel an der Spitze des Achsenschnittes $2\alpha = 89^{\circ} 16'$; man berechne den Inhalt des Kugelsektors.

48. Die Oberfläche eines Kugelsegmentes ist gleich der Fläche eines größten Kreises; wie groß ist der Centriwinkel des Segmentes?

49. Wie groß ist die Fläche der Zone zwischen dem 40. und 50. Parallelkreis der Erde, wenn die Erde eine Kugel vom Radius $r = 858{,}48$ g. M. ist, und wie groß ist dasjenige Stück der Zone zwischen dem 45. und 46. Parallelkreis, das zwischen zwei um 1° abstehenden Meridianen (Längenkreisen) liegt?

50. Um einen Cylinder vom Radius $r = 12$ cm und der Höhe $h = 10$ cm wird eine Kugel beschrieben und auf die Deckfläche des Cylinders wird ein gerader Kegel gestellt, welcher seine Spitze auf der Kugelfläche hat. Welchen Winkel bildet die Seitenlinie des Kegels mit der Grundfläche und wie groß ist der Kegelinhalt?

51. Einem abgestutzten Kegel von den Radien R, r und der Höhe h wird eine Kugel umbeschrieben, und auf die Grenzkreise des abgestutzten Kegels werden Kegel aufgesetzt, deren Spitzen in der Kugelfläche liegen; welche Neigung haben die Seitenkanten der Kegel, und wie groß sind die Volumina der Kegel?

52. Eine Kugel vom Radius r wird von einer Kegelfläche berührt, welche im Achsenschnitt den Winkel 2α hat. Wie groß ist der Raum zwischen Kegelmantel und Kugelfläche und welchen Inhalt hat eine Kugel, welche die Kegelfläche von innen und die Kugelfläche von außen berührt?

53. Um eine Kugel vom Radius $r = 40$ cm wird ein abgestutzter Kegel beschrieben, dessen Seitenkante gegen die Grundfläche unter $\alpha = 75^{\circ} 20'$ geneigt ist. Wie groß ist dessen Mantel und Inhalt?

54. Von einer Kugel vom Radius r soll eine Calotte so abgetrennt werden, daß der Mantel derselben gleich der Hälfte des Mantels desjenigen Kegels ist, welcher die Kugel im Grenzkreise der Calotte berührt. Welchen Centriwinkel spannt die Calotte?

K. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Winter, Wilhelm

Stereometrie Lehrbuch und Aufgabensammlung für Schulen

München 1890